節点積分有限要素法による非均質材料のマルチスケール解析

東北大学大学院　学生員　　車谷 麻緒
東北大学大学院　正　員　○寺田 賢二郎
東北大学大学院　学生員　　小島 隆嗣

1.　はじめに

近年の計算機性能の向上により，材料や構造物のミクロ構造を解析して，マクロな特性を評価する傾向が広がっている．しかしながら，実際的なミクロ構造は，非常に複雑な幾何性状を有していることから，メッシュ生成の容易性に加えて，低自由度かつ十分な解析精度が見込める解析手法の適用が必要である．

そこで本研究では，Dohrmann *et al.*[1] によって提案された節点ベースの有限要素法（節点積分有限要素法；NI-FEM）をミクロ構造解析に適用することによって，低自由度かつ高精度で複雑なミクロ構造を解析可能なマルチスケール解析手法を開発する．

2.　均質化法に基づく弾塑性マルチスケール問題

2.1　Two-scale 境界値問題

一般的な均質化理論においては，ミクロ構造（ユニットセル）の無次元代表長さを ϵ とし，マクロ座標系 $\boldsymbol{x}$ およびミクロ座標系 $\boldsymbol{y}$ を導入して一般化収束論を適用することで，それぞれの空間スケールにおける支配方程式が導かれる．均質化法に基づく弾塑性マルチスケール解析の定式化や数値解析アルゴリズムの詳細は文献[2] を参照することとし，ここでは導出された境界値問題のみを与える．

ミクロ領域における境界値問題は次のようになる．

$$\int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 : \boldsymbol{\sigma}\, dy = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}}\,, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{sym}\left(\nabla_x \boldsymbol{u}^0 + \nabla_y \boldsymbol{u}^1\right) = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$$

ここで，$\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ はそれぞれミクロ応力とミクロひずみ，W は弾性ひずみエネルギー関数，$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ は弾性ひずみ，$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ は塑性ひずみ，$\boldsymbol{u}^1$ は Y–周期的なミクロ変位，$\boldsymbol{\eta}^1$ はミクロ仮想変位である．

そして，ミクロ構造の構成材料は弾塑性材料とし，古典的な線形等方硬化による J_2 塑性理論に従うものと仮定する．

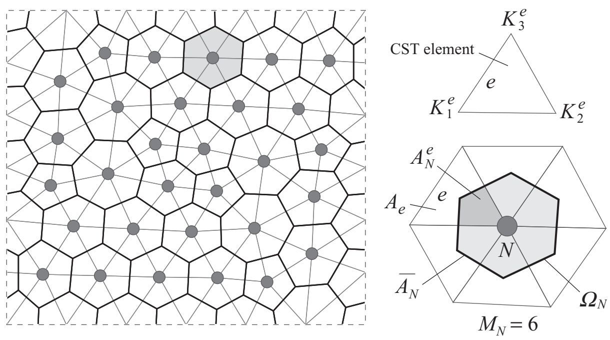
$$f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) := \|\mathrm{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| - \left(H\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y\right)$$

ここで，f は Mises の降伏関数，σ_Y は初期降伏応力，$\mathrm{dev}(\boldsymbol{\sigma})$ は Cauchy 応力の偏差成分，H は硬化パラメータ，α は塑性に関する内部変数である．

マクロ構造に関しては，応力やひずみなどのマクロ変数がミクロ変数の体積平均で与えられ，マクロ変位 $\boldsymbol{u}^0$ に関するつり合い式は次のようになる．

$$\int_X \nabla_x \boldsymbol{\eta}^0 : \boldsymbol{\Sigma}\, dx = F_{\mathrm{ext}}$$

ここで，$\boldsymbol{\Sigma}$ はマクロ応力，$\boldsymbol{\eta}^0$ はマクロ仮想変位，F_{ext} は外力による右辺項である．



図– 1 節点積分有限要素法とそのメッシュ形態

2.2　節点積分有限要素法（NI-FEM）[1]

本研究では，Dohrmann *et al.*[1] によって提案された NI-FEM をミクロ構造解析に適用する．NI-FEM は，FEM における定ひずみ三角形要素および定ひずみ四面体要素のメッシュを基礎として，**図–1** に示されるように，節点をベースとするボロノイ多角形領域で近似を行う離散化解析法である．以下では，NI-FEM の近似の方法を簡単に述べる．

まず，一般的な 2 次元 CST 要素 e のひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ の定義式を与えておく．$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d}$ は CST 要素の B マトリックスと変位ベクトルである．

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \sum_{\alpha=1}^{3} \boldsymbol{B}_{K_\alpha^e} \boldsymbol{d}_{K_\alpha^e}$$

NI-FEM では，CST 要素を利用して各々の節点周りでひずみを平均化し，連続的に近似することによって精度の向上を図ることができる[1]．

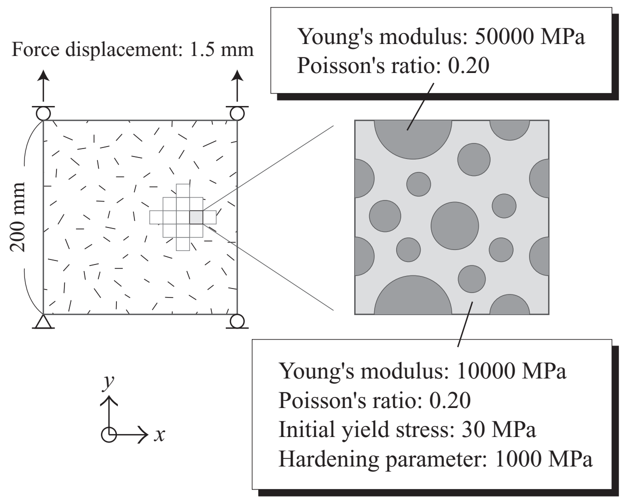
$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_N = \frac{1}{\overline{A}_N} \sum_{e=1}^{M_N} \left(\alpha_e^N A_e \sum_{\alpha=1}^{3} \boldsymbol{B}_{K_\alpha^e} \boldsymbol{d}_{K_\alpha^e} \right)$$

ここで，$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_N$ は NI-FEM における節点 N の平均ひずみ，M_N は節点 N に関わる要素数，A_e は要素 e の面積，α_e^N は A_e における節点 N を含む部分面積の割合であり，面積に関しては次式を満足する必要がある．

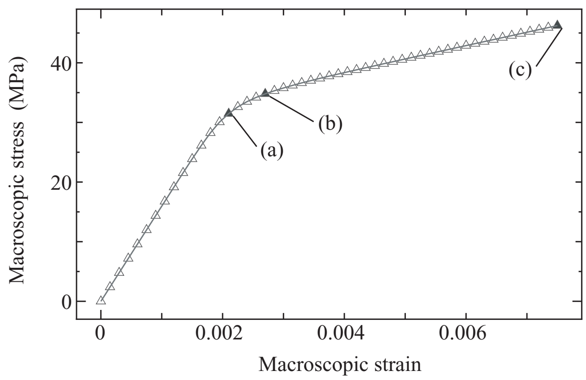
$$\overline{A}_N = \sum_{e=1}^{M_N} A_N^e = \sum_{e=1}^{M_N} \alpha_e^N A_e$$

NI-FEM では，全体系の弱形式のつり合い方程式は通常の FEM と同様である．ただし離散化は，節点を単位とするボロノイ領域ごとに行われ，最終的なボロノイ領域（節点）N の（接線）剛性行列 $\boldsymbol{K}_N$ は次式で表される．

$$\boldsymbol{K}_N = \int_{\Omega_N} \boldsymbol{B}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_N \boldsymbol{B}_N\, d\Omega = \boldsymbol{B}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_N \boldsymbol{B}_N \overline{A}_N h_N$$



図– 2 ミクロおよびマクロスケールの解析モデル



図– 3 マクロ応力ーひずみ曲線

ここで，Ω_N は節点 N のボロノイ領域，$\boldsymbol{D}_N$ は構成材料の接線係数テンソル，h_N は厚さである．

また，NI-FEM における節点周りの平均化は，同一材料内で行われるため，複合材料・複合構造の解析を行う際は，材料界面の拘束条件・連続条件を別途追加する必要がある．本研究では，ペナルティ法により拘束条件を与える．

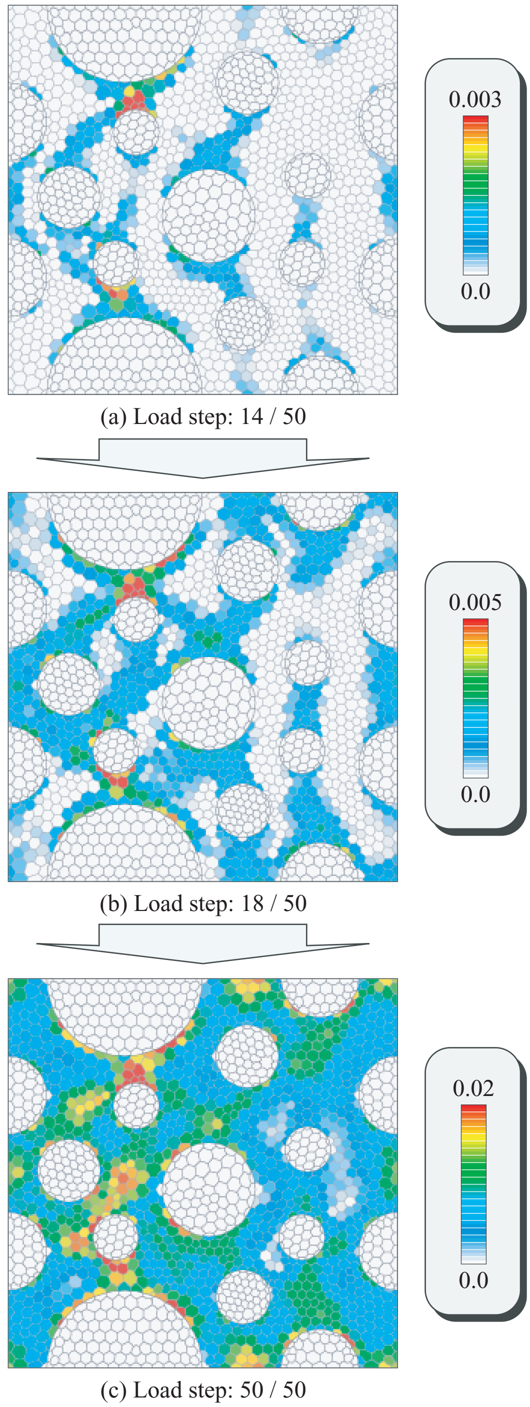
$$\int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 : \boldsymbol{\sigma}\, dy + \int_{\Gamma_\mathrm{B}} \overline{p}\left(\boldsymbol{\eta}^1_+ - \boldsymbol{\eta}^1_-\right)\cdot\left(\boldsymbol{u}^1_+ - \boldsymbol{u}^1_-\right) d\Gamma = 0$$

ここで，$\overline{p}$ はペナルティ係数，Γ_B は材料界面，添え字 $\pm$ は材料の種別である．

3. 弾塑性マルチスケール数値解析例

解析対象は，**図–2** に示されるような，母材と円形介在物で構成されるミクロ構造を有する非均質体である．母材は弾塑性体，介在物は線形弾性体と仮定する．マクロ構造は単一の双 1 次四辺形有限要素でモデル化し，y 方向に変位制御で単純引張り載荷を行う．

解析結果として，マクロ応力ーひずみ曲線を**図–3** に，また**図–3** 中の (a)〜(c) の各状態におけるミクロ領域での相当塑性ひずみ分布を**図–4** に示す．応力ーひずみ曲線，相当塑性ひずみ分布ともに適切な結果が得られており，このような複雑な幾何性状を有するミクロ構造であっても，三角形メッシュを用いて容易にモデル化から解析が行える．



図– 4 ミクロスケールにおける相当塑性ひずみの進展

4. おわりに

本研究では，NI-FEM をミクロ構造解析に適用した弾塑性マルチスケール解析法を開発した．本手法の特徴は，三角形メッシュによる利便性と節点ベースの近似による高精度を有することである．

参考文献

1) Dohrmann, C.R., Heinstein, M.W., Jung, J., Key, S.W. and Witkowski, W.R. : Node-based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.47, pp.1549–1568, 2000.
2) Terada, K. and Kikuchi, N. : A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogenous media, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.190, pp.5427–5464, 2001.