# 有限被覆法による3次元ひび割れの進展解析

東北大学大学院　学生員　○車谷 麻緒
東北大学大学院　正　員　　寺田 賢二郎

## 1.　はじめに

FEM などの離散化解析手法を用いてひび割れ進展を解析する際は，解析メッシュに依存しない応力の算定や，メッシュに制約されないひび割れ形成のモデル化が課題である．既往の研究では，X-FEM を中心にリメッシュの不要な 3 次元ひび割れ進展解析法が開発されているものの，メッシュ依存性を示しやすい四面体メッシュを使用するものや，単一のひび割れを解析するものにとどまっている [1)].

本研究・本論文は，X-FEM を含む一般化有限要素法のひとつである有限被覆法 [2)] と空間近似に優位な定型の格子メッシュを用いて，解析対象のメッシュ生成およびひび割れ進展に伴うリメッシュを要しない 3 次元ひび割れ進展解析法を開発・提案し，その有効性を示すものである．

## 2.　ひび割れ進展問題に対する有限被覆法

### 2.1　FCM の概説とひび割れ進展のモデル化

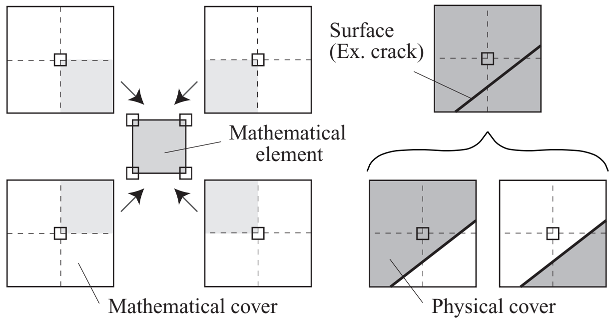
FCM では，解析対象と支配方程式の分割と再構築という点では FEM と同様であるが,「近似関数が定義される数学的な部分領域（数学領域）」と「支配方程式が満たされるべき物理的な部分領域（物理領域）」を分離して考えるという点で FEM とは大きく異なる．数学領域とは近似基底関数の定義域であり，**図–1** に示される「数学被覆」と呼ばれる部分領域が重なり合うことによって形成される．そして，数学被覆と物理領域の共通領域として定義される「物理被覆」が重なり合うことで物理領域全体が形成される．また，それぞれの被覆の共通領域が FEM で言うところの「要素」となり FEM と同様に全体系に対する近似部分領域となる．

数学領域と物理領域の分離により，FCM におけるプリプロセスすなわちメッシュ生成は，解析対象の幾何形状の認識に加えて定型の格子メッシュを配置するだけで完了する．さらに，ひび割れ進展問題においては，格子メッシュの空間的位置を変更することなく，リメッシュを行わずに，ひび割れ進展に伴う幾何形状（物理被覆）の特定・再定義をするだけで，ひび割れ進展解析を進めることができる．したがって，**図–2** 左に示されるように，ひび割れ進展の演算と同時に物理被覆の再認識を各解析ステップで行うことにより，一貫してメッシュによる束縛を受けない解析が実現される．

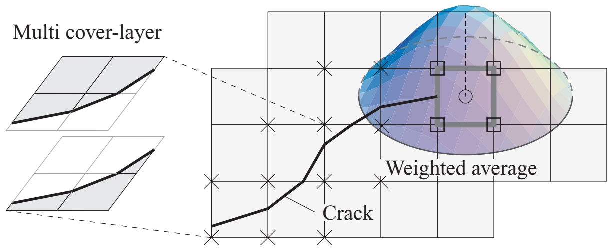
### 2.2　弱形式のつり合い方程式

ひび割れ進展問題では，ひび割れ先端における力学挙動の取り扱いが重要であり，本研究では，既往の研究 [3)] で多く採用されている Cohesive crack モデルを導入する．

$$\left\|\boldsymbol{t}^{\mathrm{coh}}\right\| - f_{\mathrm{t}} \exp\left(-\frac{f_{\mathrm{t}}}{G_{\mathrm{f}}}\kappa\right) \ \leq\ 0$$




**図– 1** 数学被覆と数学要素（左）および物理被覆（右）



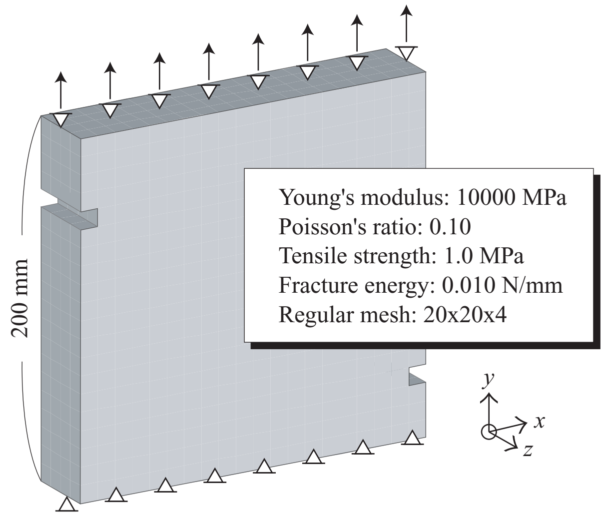

**図– 2** 不連続変形とひび割れ判定応力

ここで，$f_{\mathrm{t}}$ は引張り強度，$G_{\mathrm{f}}$ は破壊エネルギー，$\kappa$ は載荷履歴における最大開口変位である．本研究では**図–2** に示されるように，ひび割れに関連する被覆内で重み付き平均して得られる最大引張り主応力をひび割れ発生の判定に用い，その主方向の直角方向をひび割れの方向と定義する．また，ひび割れの進展は要素単位の変位制御型で行うものとする．

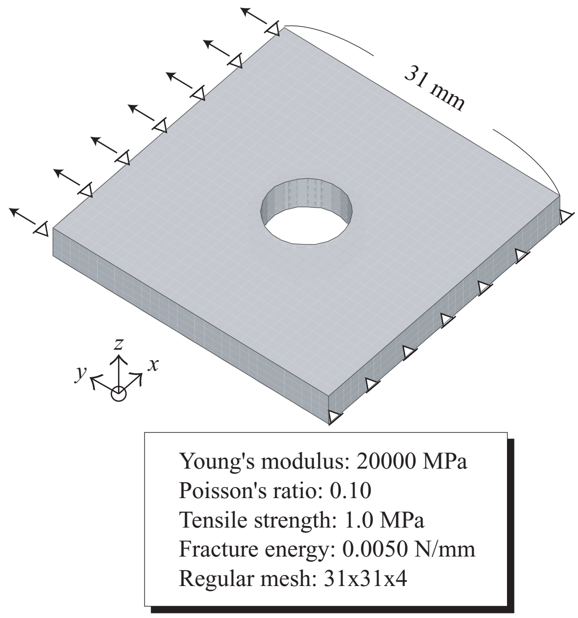
格子メッシュを用いた FCM では，解析対象の幾何形状に節点が配置されるとは限らない．したがって，複合構造の解析においては，材料界面における力学条件に対して，Lagrange 未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ に基づく界面要素を用いて近似することとし，対応する弱形式の支配方程式は次式となる．

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \nabla\delta\boldsymbol{u} : \boldsymbol{c} : \nabla\boldsymbol{u}\, d\Omega + \int_{\Gamma_{\mathrm{B}}} \left(\delta\boldsymbol{u}^{[1]} - \delta\boldsymbol{u}^{[2]}\right)\cdot\boldsymbol{\lambda}\, d\Gamma \\
&\quad = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{u}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}\, d\Omega + \int_{\Gamma_{\mathrm{t}}} \delta\boldsymbol{u}\cdot\bar{\boldsymbol{t}}\, d\Gamma \\
&\qquad + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \left(\delta\boldsymbol{u}^{[1]} - \delta\boldsymbol{u}^{[2]}\right)\cdot\boldsymbol{t}\, d\Gamma\,, \\
&\int_{\Gamma_{\mathrm{B}}} \delta\boldsymbol{\lambda}\cdot\left(\boldsymbol{u}^{[1]} - \boldsymbol{u}^{[2]}\right) d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

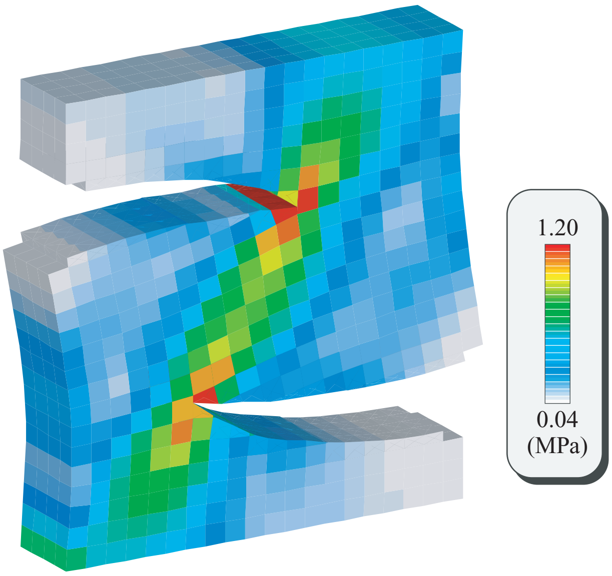
ここで，$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は弾性テンソル，$\bar{\boldsymbol{t}}$ は表面力ベクトル，$\bar{\boldsymbol{b}}$ は物体力ベクトル，$\Omega$ は解析対象領域，$\Gamma_{\mathrm{B}}$ は材料境界，$\Gamma_{\mathrm{D}}$ はひび割れ境界，$\boldsymbol{t}$ は Cohesive crack モデルに従う結合力ベクトル，添え字 [1] と [2] は領域の種別である．



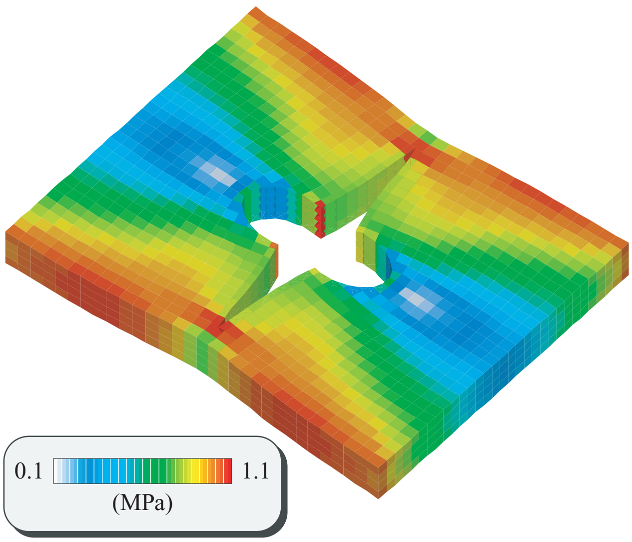

**図– 3** 切り欠きを有する 3 次元構造部材




**図– 5** 円孔を有する 3 次元構造部材




**図– 4** 変形図（×1000）と von-Mises の相当応力分布




**図– 6** 変形図（×5000）と von-Mises の相当応力分布

## 3.　3 次元数値解析例

1 例目の解析対象は，**図–3** に示されるような，2 箇所に切り欠きを有する 3 次元構造部材である．引張り強度や破壊エネルギーなどの材料パラメータは同図の通りとし，$y$ 方向に変位制御で引張り載荷を行う．

解析結果として，変形図と von-Mises の相当応力分布を **図–4** に示す．切り欠きから発生する 2 つのひび割れを適切に捉えられており，本解析手法の有効性が示されている．

2 例目の解析対象は，**図–5** に示されるような，中央に円孔を有する 3 次元構造部材である．引張り強度や破壊エネルギーなどの材料パラメータは同図の通りとし，$y$ 方向に変位制御で引張り載荷を行う．

解析結果として，変形図と von-Mises の相当応力分布を **図–6** に示す．円孔問題に対する力学的考察と一致したひび割れの進展が追えており，格子メッシュと FCM によるひび割れ進展解析の有効性を例示する結果となっている．また，格子メッシュを用いて，円孔のような湾曲した物理境界のモデル化からそのひび割れ進展を適切に捉えられている．

## 4.　おわりに

本研究では，格子メッシュと FCM を用いた 3 次元ひび割れ進展解析法を開発した．そして，3 次元構造部材の数値解析例を通して，メッシュによる制約を受けずにひび割れ進展を適切に解析できることを例証した．

### 参考文献


1) Areias, P.M.A. and Belytschko, T. : Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.63, pp.760–788, 2005.

2) 車谷麻緒，寺田賢二郎：多重被覆モデリングによる有限被覆法 —— 非均質脆性材料の不連続面進展解析：日本計算工学会論文集，論文番号 20060029，2006.

3) Wells, G.N. and Sluys, L.J. : A new method for modelling cohesive cracks using finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.50, pp.2667–2682, 2001.