

非均質体に対する節点積分有限要素法の開発

○東北大学大学院 学生員 小島隆嗣
東北大学大学院 正員 寺田賢二郎
東北大学大学院 学生員 車谷麻緒

1. はじめに

固体解析には要素単位で積分を行う有限要素法（以下、EI-FEM）が主に用いられてきた。しかし、ゴム材のマイクロ構造のような非均質性が顕著な構造では、変形が進むにつれて要素が健全な形状を保持できなくなり、しばしば解析が破綻してしまうことが指摘されている。現在まで、EI-FEMに代わる新しい手法が数多く開発されてきたが、物理量の多くが要素単位で評価され隣接要素で不連続になることに起因してどの手法も実用性に欠けている。

そこで本研究では、Dohrmann ら¹⁾によって提案された節点積分有限要素法（NI-FEM）の特徴に着目して、メッシュのつぶれによる解析破綻を連続的なリメッシングにより回避する新しい解析手法を提案する。

2. 節点積分有限要素法

本研究では、離散化近似には Dohrmann ら¹⁾によって提案された NI-FEM を採用する。NI-FEM は EI-FEM の CST 要素を基礎として近似を行うが、その特徴は (1) 節点ならびにその影響範囲となる多角形領域を粒子のようにみなすことができ、(2) すべての物理量をその節点上で評価できるという点である。以下、大変形問題における NI-FEM の定式化を簡単に述べる。

まず、大変形解析における EI-FEM の要素 e の変形勾配 F_e の FEM 近似式を与えておく。

$$F_{iJ}^e = \sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha,i} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial X_J} \quad (1)$$

ここで、 x , X は現座標および初期座標、 N_{α} は節点 α の形状関数である。NI-FEM では、図-1 に示すように、節点 N を含む要素数を M_N として節点 N の情報となる領域、すなわち節点 N の物理領域の面積 $\bar{A}_N$ は、節点 N を含む要素 e の面積を A_e として

$$\bar{A}_N = \sum_{e=1}^{M_N} A_e^e = \sum_{e=1}^{M_N} \alpha_e^N A_e \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 α_e^N は

$$\alpha_e^{N1} + \alpha_e^{N2} + \alpha_e^{N3} = 1 \quad (3)$$

を満たす任意の実数である。そして、式 (1) の変形勾配を節点 N を含む CST 要素を利用して節点まわりで平均化し、その領域の情報として節点に付与する。

$$F_{iJ}^N = \frac{1}{\bar{A}_N} \sum_{e=1}^{M_N} \left(\alpha_e^N A_e \sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha,i} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial X_J} \right) \quad (4)$$

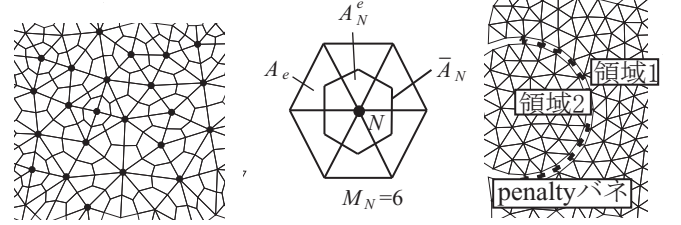


図-1 NI-FEM

NI-FEM では、全体の釣り合い式は EI-FEM と同様である。ただし、剛性も変形勾配と同様に節点単位で離散化され、節点 N の物理領域を Ω_N として剛性マトリックス K_N は以下のように表される。

$$K_{ij,\alpha\beta}^N = \int_{\Omega_N} \left(\frac{A_N^e}{\bar{A}_N} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_k} c_{ikjl} \frac{A_N^f}{\bar{A}_N} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_l} + \frac{A_N^e}{\bar{A}_N} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_k} \delta_{ij} \sigma_{lk} \frac{A_N^f}{\bar{A}_N} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_l} \right) d\Omega \quad (5)$$

また、NI-FEM では節点周りの平均化は、同一材料内で行われるためゴムマイクロ構造のような非均質体を対象とする場合、材料ごとに異なる基底関数を必要とする。そして、材料界面では異なる2つの材料ごとに自由度が設定されることになるので、変位と応力ベクトルの連続条件を満足させる必要がある。本研究では、Penalty 法を導入して、材料界面の変位の連続条件を近似的に満足させる。

Lagrange 未定乗数 λ を導入し、Penalty 係数 p を用いて、 $\lambda_i = p(u_i^+ - u_i^-)$ のように近似することにより変位を未知数とする釣り合い方程式が導出できる。

$$\int_{\partial a} \eta_i t_i ds - \int_a \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} da + \int_a \eta_i b_i da - \int_{\Gamma_B} p (\eta_i^+ - \eta_i^-) (u_j^+ - u_j^-) d\Gamma = 0 \quad (6)$$

ここで、 p はペナルティ係数、 Γ_B は材料界面、添え字 $\pm$ は材料の種類である。

3. 節点分布を更新する節点積分有限要素法

3.1 計算アルゴリズム

本研究で提案する手法では、増分解析における各時間ステップにおいて、解析ステップとリメッシュステップという2つのサブステップを繰り返すことにより物体の平衡状態を更新する。

各時間ステップにおいて、解析ステップでは荷重増分に対して物体の平衡状態を Newton Raphson 法の収束計算により算出する。次に、リメッシュステップにおいて任意に定めたリメッシュ基準を満たした際に節点を新たに分布

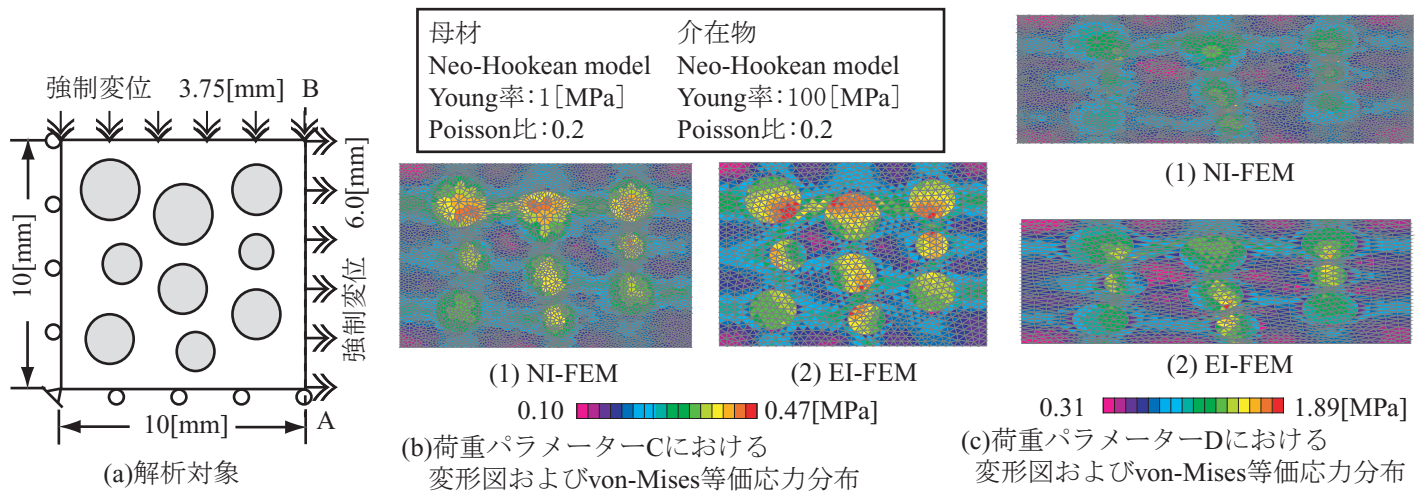


図-2 ゴムマイクロ構造を想定した数値解析例

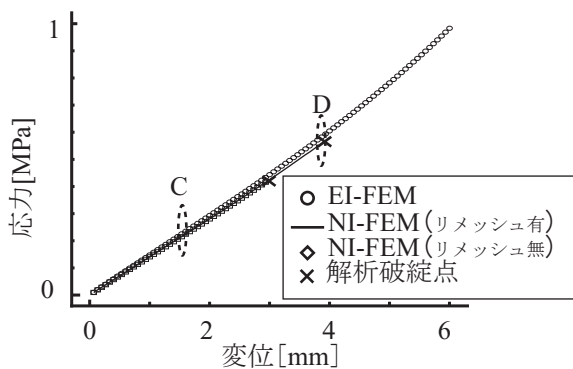


図-3 A-B 面上変位-見かけの応力関係

させ、デローニー三角分割法²⁾を用いてリメッシュを行う。このリメッシュにより生成された節点の物理情報は、リメッシュ前の釣り合い状態の節点情報および幾何形状をもとに線形補間することで更新する。

この操作を繰り返すことにより、常に健全な要素形状を保持したまま解析を行うことが可能となる。

3.2 マッピングの対象となる変数の選択

NI-FEMでは変位だけでなくすべての物理量は節点で評価される。したがって、本研究で提案するアルゴリズムにおいて、リメッシング時のデローニー三角分割によって新たに設置された節点の物理量は、前ステップにおける釣り合い状態の節点の情報からマッピングすることで連続分布を仮定することができる。具体的には、新たに生成した節点の物理情報は、その節点が前ステップにおけるメッシュ内で含まれる要素を抽出し、その要素を構成する節点の物理情報から形状関数を用いて以下に示す線形補間を行い、その節点の物理情報とする。

$$\mathbf{F}(x, y) = N_1^e(x, y)\mathbf{F}_1^e + N_2^e(x, y)\mathbf{F}_2^e + N_3^e(x, y)\mathbf{F}_3^e \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{F}$ は新たな節点の物理情報であり、 N_α^e 、 $\mathbf{F}_\alpha^e$ は前ステップにおける要素 e を構成する節点 α の形状関数および物理情報である。

4. 数値解析例

図-2(a)に示すようなゴム材のマイクロ構造を想定した複雑な構造に対して、提案するNI-FEMを適用して解析し、複雑な変形や応力分布に対する適用性およびロバスト性を検証する。マクロ的には一軸引張試験を実施していることを想定して、マイクロ構造のマクロ変形を制御する拘束条件を設定した。対象とする材料の構成モデルにはNeo-Hookeanモデルを仮定した。

数値解析結果として、図-2(a)に示すA-B面上の変位と見かけの応力の関係を図-3に示し、併せて従来のNI-FEM、EI-FEMを適用して得られたものを同図に示す。また、図-3のC、Dの状態のNI-FEM、EI-FEMによるvon-Mises等価応力分布を図-2(b)、(c)に示す。図-3は、提案するNI-FEMが従来のNI-FEMに比べロバスト性が向上していることを表している。さらに、非線形弾性材料の非均質構造を対象とした大変形解析においても提案するNI-FEMはEI-FEMと定量的に一致した近似解を得ることができ、実構造に近い複雑なモデルに対しても提案手法の有用性を主張できる。ただし、今回の解析においてはEI-FEMが最もロバストな結果が得られたが、この理由と解決策については、3次元問題への対応と合わせて今後の課題としたい。

5. おわりに

本研究ではNI-FEMをベースとして連続的なリメッシュを繰り返すことで、メッシュの潰れによる解析破綻を回避可能な手法を開発した。また、従来の手法では困難とされていたリメッシュに伴う物理量のマッピングも、NI-FEMの特徴を利用することで不都合なく実現できた。しかし、実用化へ向けては3次元問題への拡張とともに、近似解が境界条件の影響を受けやすいというNI-FEMのデメリットを克服する必要がある。

参考文献

- 1) C.R.Dohrmann, M.W.Heinstein, J.Jung, S.W. Key, W.R. Witkowski: Node-based uniform strain element for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1549-1568, 2000
- 2) 谷口健男: FEMのための要素自動分割-デローニ三角形分割法の利用-, 森北出版, 1992.