

初期不整や風荷重による構造系の強度低下量に対する確率的評価

東北大学 学。大内知章 正 池田清宏 正 山川優樹

1. はじめに

座屈を起こす構造系の座屈強度は、初期不整によって大きく低下してしまうことが Koiter¹⁾ によって明らかにされており、本研究室でも部材長や節点位置の初期不整に関する一連の研究を行ってきた²⁾。これらの初期不整は品質管理によってある程度の誤差に留めることは可能である。一方、風等の外力の変動は初期不整よりも耐荷力に及ぼす影響は大きく、現実的には支配的であると言われている。

そこで本研究では、外力の初期不整として風荷重に焦点を当て、平均風速に基づく平均風力と種々の要因により生じる変動風力とで構成される風荷重による構造系の座屈荷重低下の仕組みを、構造系の強度低下量曲線を求めることにより評価することを試みた。

2. 風荷重算定法のまとめ

本研究では、建築物荷重指針・同解説⁴⁾に基づいた現実的な風荷重モデルを用いた。これによる小規模構造物に対する風荷重 W_S 及び、塔状トラス構造物に対する風荷重 W_D は、以下の算定式により算定される。

$$W_D = q_Z C_D G_D A \quad (1)$$

$$W_S = 0.4 U_0^2 H^{0.4} C_e C_D A \quad (2)$$

ここに、 q_Z は速度圧 (N/mm²) であり、 C_D 、 G_D 、 C_e は各々風力係数、ガスト影響係数、環境係数と呼ばれ、構造物の形状や周辺の地理的状況などの様々な要因により定まる定数であり、 U_0 は基本風速 (m/s)、 H は基準高さ (m)、 A は投影面積 (m²) を表す。

ここで、再現期間 T 年に対する風荷重 W を一定の荷重パターンベクトル f と仮定し、係数 α を用いて

$$W = \alpha f \quad (3)$$

と定義した風荷重を、 $0 \leq \alpha \leq 1$ の範囲で変動させ、大きさを表すパラメータ α に対する構造系の強度低下量曲線を求めた。

3. 変動風力に対する評価への試み

3.1 一般化初期不整感度則

初期不整を含む構造系の非線形支配方程式

$$F(U, \Lambda, \tilde{v}) = 0 \quad (4)$$

を考える。ここに U は変位ベクトル、 Λ は荷重パラメータ、 $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_i)^T$ は初期不整増分ベクトルである。

ここで、初期不整が十分に小さいと仮定した場合の単純不安定対称分岐点における一般化初期不整感度則

は、Ikeda・Ohsaki の論文³⁾を引用すると、次式で表される。

$$\tilde{\Lambda}^c \sim - \left[(-\alpha)^{\frac{2}{3}} a^T \tilde{v} \right]^{\frac{2}{3}} + \beta b^T \tilde{v} \quad (5)$$

ここに、 α, β はある定数で、 $a = (a_1, \dots, a_p)^T$ が 1 次不整影響ベクトル、 $b = (b_1, \dots, b_p)^T$ が 2 次不整影響ベクトルであり、以下の差分式 (6)、(7) を用いて各々の成分を求めることが可能である。

$$a_i \sim \frac{1}{\tilde{v}_i} \Phi_1^{c0T} [F(U^{c0}, \Lambda^{c0}, v_1^0, \dots, v_i^0 + \tilde{v}_i, \dots, v_p^0) - F(U^{c0}, \Lambda^{c0}, v_1^0, \dots, v_i^0, \dots, v_p^0)] \quad (6)$$

$$b_i \sim \frac{1}{\tilde{v}_i} [\Phi_1^{c0T} S(U^{c0}, \Lambda^{c0}, v_1^0, \dots, v_i^0 + \tilde{v}_i, \dots, v_p^0) \Phi_1^{c0} - \Phi_1^{c0T} S(U^{c0}, \Lambda^{c0}, v_1^0, \dots, v_i^0, \dots, v_p^0) \Phi_1^{c0}] \quad (7)$$

ここに、 Φ_1^{c0} は単純不安定分岐点における固有ベクトル、 S は特異点における接線剛性剛列を表す。

3.2 統計理論の適用

式 (5) において、1 次不整、2 次不整による強度低下量 $a = -[(-\alpha)^{\frac{2}{3}} a^T \tilde{v}]^{\frac{2}{3}}$ 、 $b = \beta b^T \tilde{v}$ の確率密度関数 ϕ_a 、 ϕ_b は、以下のように書ける²⁾。

$$\phi_a = \frac{3|a|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp\left(-\frac{|a|^3}{2(\sigma_a)^2}\right), (-\infty < a < 0) \quad (8)$$

$$\phi_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp\left(-\frac{b^2}{2(\sigma_b)^2}\right), (-\infty < b < \infty) \quad (9)$$

従って、1 次不整および 2 次不整による座屈強度低下量の確率密度関数は、式 (8)、(9) を以下のように合成することで得られる。

$$\phi_{\tilde{\Lambda}^c} = \int_{-\infty}^0 \phi_a(a) \phi_b(\tilde{\Lambda}^c - a) da \quad (10)$$

3.3 解析例 1 2 バートラス

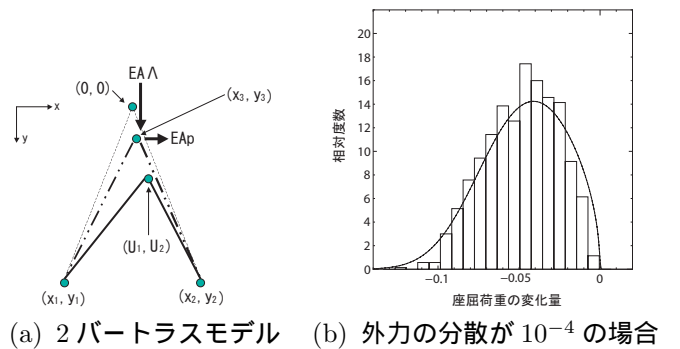


図-1 2 バートラスモデルと解析結果

解析例として図-1 (a) に示す 2 バートラスモデルについて、各節点位置及び部材の断面積、更に頂点に外力の初期不整として x 軸方向の荷重を与えた計 9 個の初期不整を考慮して解析した。

その結果，差分式 (6)，(7) を用いて初期不整影響ベクトル a, b を求め，式 (5) より，以下に示す 2 バートラスに対する一般化初期不整感度則が得られた．

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}^c = & -[C_1 \tilde{v}_p + C_2(\tilde{v}_{x_1} + \tilde{v}_{x_2}) + C_3(\tilde{v}_{y_1} - \tilde{v}_{y_2}) \\ & + C_4 \tilde{v}_{x_3} + C_5(\tilde{v}_{A_1} - \tilde{v}_{A_2})]^{\frac{2}{3}} + C_6(\tilde{v}_{x_1} - \tilde{v}_{x_2}) \\ & + C_7(\tilde{v}_{y_1} + \tilde{v}_{y_2}) + C_8 \tilde{v}_{y_3} + C_9(\tilde{v}_{A_1} + \tilde{v}_{A_2})\end{aligned}\quad (11)$$

式 (11) における係数の値は以下の通りである．

$$\begin{aligned}C_1 = & -1.441, C_2 = 4.558 \times 10^{-2}, C_3 = 4.182 \times 10^{-2} \\ C_4 = & -9.115 \times 10^{-2}, C_5 = -6.995 \times 10^{-2}, C_6 = 0.2971 \\ C_7 = & 9.902 \times 10^{-2}, C_8 = -0.1980, C_9 = -0.1239\end{aligned}$$

図-1 (a) において，部材に関する初期不整に，平均 0，標準偏差 10^{-3} の正規乱数を，外力の初期不整に，平均 0，標準偏差 $10^{-2} \sim 10^{-4}$ の正規乱数を与えた場合の，構造系の座屈強度の低下量のヒストグラムと，式 (10) より求めた確率密度関数とを比較した．その結果，図-1 (b) に示す通り，強度低下量に対する外力の初期不整の影響は，部材に関する初期不整の影響よりも大きいことが示された．

3.4 解析例 2 半谷トラスドーム

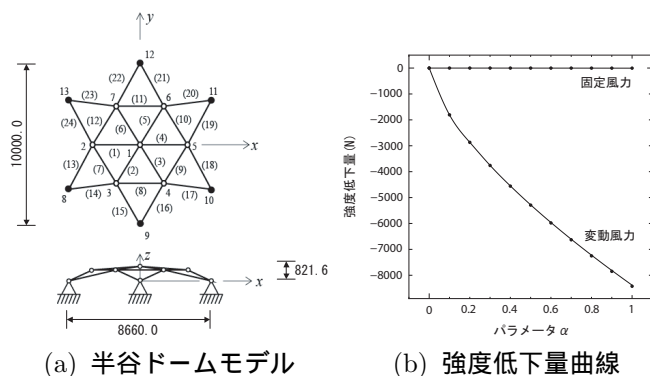


図-2 半谷ドームモデルと強度低下量曲線

図-2 (a) に示す半谷トラスドームについて，風荷重パターンベクトル $W = \alpha f$ を， α を変動させて作用させた場合の構造系の強度低下量曲線を求め，図-2 (b) に示した．この時，半谷トラスドームの耐力力は $\tilde{\Lambda}^c$ の $2/3$ 乗則に基づいて低下した．一方，一定の風荷重を作用させた場合の強度低下量は，図-2 (b) に示す通り，非常に小さかった．これにより風荷重が分岐モードに対し直交する構造系には，変動風力が主に影響を及ぼすことが示された．

4. 平均風力に対する評価への試み

4.1 解析例 1 多自由度トラスタワー

解析例として図-3 (a) に示す鉄塔型多自由度トラスタワーモデルを取り上げる．各部材の断面積を $1.0 \times 10^4 \text{ mm}^2$ ，弾性係数を $2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ とする．この時，構造系の強度低下量は， $\tilde{\Lambda}^c$ の $2/3$ 乗則に基づき，定数 C を用いて，次式で与えられる．

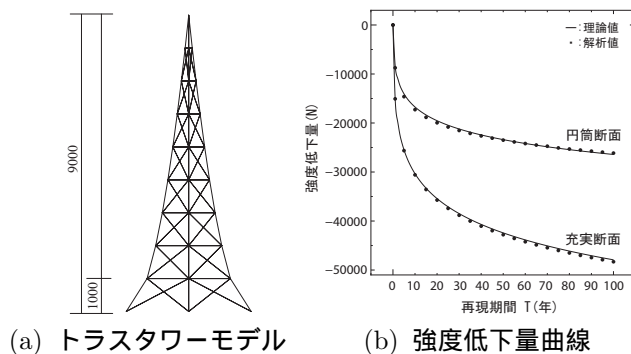


図-3 鉄塔型トラスタワーモデルと強度低下量曲線

$$\tilde{\Lambda}^c \sim C \alpha (T)^{\frac{2}{3}} \quad (12)$$

ここで，パラメータ α と再現期間 T の関係式は，以下の式 (13) で表される．

$$\alpha(T) = 0.9995(0.126 \ln(T) + 0.42)^2 \quad (13)$$

これらを用いて，部材断面を充実断面及び，約 $1/5$ の断面積に相当する円筒断面の場合の 2 ケースで解析し，以下の式 (14)，(15) と図-3 (b) に示す強度低下量曲線が得られた．

$$\text{充実断面: } \tilde{\Lambda}_a^c = -4.79 \times 10^5 (0.126 \ln(T) + 0.42)^{\frac{4}{3}} \quad (14)$$

$$\text{円筒断面: } \tilde{\Lambda}_b^c = -2.64 \times 10^5 (0.126 \ln(T) + 0.42)^{\frac{4}{3}} \quad (15)$$

尚，図-3 (b) に示す強度低下量曲線により，再現期間 100 年の風荷重による座屈荷重の低下量は，充実断面の場合は，完全系の座屈荷重のおよそ 3.9 % に相当し，また，円筒断面の場合は，完全系の座屈荷重のおよそ 11 % に相当することが分かった．

5. 結論

本研究では，風荷重は，構造系によってその構成要素である平均風力と変動風力のいずれかが支配的であることを明らかにした．特に，一定の風荷重に対する構造系の耐力力低下の仕組みは，構造系の強度低下量曲線を求めることにより評価できた．

今後は，より現実的な梁部材モデルを用いて，風荷重をある確率分布に従う確率風と仮定した場合の構造物強度の確率変動を，統一的に評価することへの取り組みが課題である．

参考文献

- 1) Koiter, W.T: *On the Stability of Elastic Equilibrium*, Dissertation, Delft, Holland (English translation: NASA technical translation F 10: 833, 1967).
- 2) 池田 清宏，室田 一雄：構造系の座屈と分岐，コロナ社，2001.
- 3) Ikeda, K. and Ohsaki, M.: *Generalized sensitivity and probabilistic analysis of buckling loads of structures*, Int. J. of Non-linear Mechanics.
- 4) 日本建築学会：建築物荷重指針・同解説 (2004)，日本建築学会，2006.