

# 板の弾塑性座屈荷重の確率変動の初期不整感度則による体系的記述

東北大学 学○ 柴崎 晃 正 池田清宏

表-1 鋼材の機械的性質

| 鋼種                                   | SS400                  |
|--------------------------------------|------------------------|
| 降伏応力 $\sigma_Y$ (N/mm <sup>2</sup> ) | 200~300                |
| ヤング係数 $E$ (N/mm <sup>2</sup> )       | $2.0 \times 10^5$      |
| 引張強さ $\sigma_U$ (N/mm <sup>2</sup> ) | 400                    |
| 降伏ひずみ $\varepsilon_Y$                | $1.175 \times 10^{-3}$ |
| ひずみ硬化開始ひずみ $\varepsilon_{st}$        | $1.75 \times 10^{-2}$  |
| ひずみ硬化率 $E_{st}$ (N/mm <sup>2</sup> ) | 2486                   |
| ポアソン比 $\nu$                          | 0.3                    |

$$w = \epsilon t \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{a} \quad (3)$$

ここに、 $\epsilon$ は初期不整であり、初期たわみの最大値は(初期不整 $\epsilon$ ) $\times$ (板厚 $t$ )となる。

解析では、降伏応力が235N/mm<sup>2</sup>のとき幅厚比パラメータ $R_R$ が0.2, 0.9, 1.1, 1.4となる4種類の板厚 $t=36.06, 8.01, 6.56, 5.15$ mmと、200~300N/mm<sup>2</sup>の範囲内の降伏応力において各板厚、降伏応力ごとに $\epsilon$ を0.001~0.1の範囲で変化させながらそれぞれの終局強度を求める。

## 3. 解析結果および初期不整感度則の適用

それぞれの板厚における解析結果の初期不整感度関係を図-1に示す。これらの結果から、圧縮力を受ける周辺単純支持板の降伏応力を考慮した感度則を次式で表すことを提案する。

$$\sigma_u = C_1 \sigma_Y - C_2 (\sigma_Y) \epsilon^\rho + \text{高次項} \quad (4)$$

$\sigma_u$ は不完全系の終局強度である。 $C_1, C_2$ は解析結果に感度則を適用して求める。

式(4)に $\sigma_Y = \sigma_M + \eta$ を代入して $\sigma_M$ の近傍で級数展開し低次項について整理すると、次式のようなになる。

$$\tilde{\sigma}_u = \sigma_u - C_1 \sigma_M = C_1 \eta - C_2 (\sigma_M) \epsilon^\rho + \text{高次項} \quad (5)$$

$\eta, \epsilon$ をワイブル分布に従う確率変数として、弾塑性座屈荷重の確率変動を求める。(5)の第1項を $a_1$ 、第2項 $a_2(a_2 \leq 0)$ とおくと、それらの和 $\tilde{\sigma}_u$ の確率密度関数 $\phi_u$ は、 $a_1, a_2$ の確率密度関数を $\phi_1, \phi_2$ とすれば、次式で表される。

$$\phi_u(\tilde{\sigma}_u) = \int_{-\infty}^0 \phi_1(\tilde{\sigma}_u - a_2) \phi_2(a_2) da_2 \quad (6)$$

得られた確率密度関数から、弾塑性座屈荷重の確率変動を考察する。ワイブル分布は以下のような確率密度関数を持つ確率分布である。 $m, \lambda, g$ はパラメータである。

## 1. はじめに

実構造物は、形状の狂いや溶接に伴う残留応力などの初期不整を持つ。Koiterは初期不整の介在により構造物の耐荷力が低下するという、強度の初期不整依存性を明らかにし、初期不整感度則

$$f_c = f_c^0 - C \epsilon^\rho + \text{高次項} \quad (1)$$

として定式化した<sup>1)</sup>。ここに、 $f_c$ は初期不整を持つ不完全系の耐荷力、 $f_c^0$ は初期不整がない完全系の耐荷力、 $\epsilon$ は初期不整、 $C > 0$ は $\epsilon$ に依存しないある正定数である。また、 $\rho$ は特異点の種類により決まる定数であり、例えば、対称分岐の場合 $\rho = 2/3$ 、荷重の極大点の場合 $\rho = 1$ であることが知られている<sup>1) 2)</sup>。

初期たわみを持つ圧縮板の弾塑性座屈荷重の初期不整感度則は、幅厚比パラメータの変化に対して2乗則、2乗則と2/3乗則の遷移域、2/3乗則、1乗則のように4段階に変化することが確認されている<sup>4)</sup>。著者らは、予備研究として簡単なモデルにパラメータ $\beta, \gamma$ を導入し、 $\beta$ の変化に対して弾塑性座屈荷重の感度則が4段階に変化することを確認し、感度則の理論式を導いている。

本研究では、それぞれの感度則を示す4つの板厚について、圧縮板の終局強度を初期たわみと降伏応力の値を変化させながら、弾塑性有限変位解析プログラムUSSP<sup>3)</sup>を用いた数値解析で求めることにより、板の弾塑性強度のデータバンクを作製する。そして、降伏応力を考慮した感度則を提案し、その感度則と、現実の初期たわみと降伏応力の確率分布としてワイブル分布を用いて、弾塑性座屈荷重の確率変動を体系的に記述している。

## 2. 解析モデル

解析モデルの周辺単純支持板を考える。板の寸法を縦 $a = 400$  mm、横 $b = 400$  mmとする。圧縮の方向は縦方向とする。表-1には、解析に使用した鋼材(SS400)の機械的性質を示す。

次に、幅厚比パラメータを次式で定義する。

$$R_R = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{k\pi^2}} \quad (2)$$

ここに、 $t$ は板厚、 $k$ は座屈係数(=4.0)である。また、板の初期たわみとして次の波形を仮定する。

$$\phi(x) = m\lambda(x - g)^{m-1} \exp[-\lambda(x - g)^m] \quad (7)$$

$g = 0$  のとき、ワイブル分布に従う確率変数  $X$  の変数変換  $Y = CX^\rho$  は、パラメータが  $m' = m/\rho$ ,  $\lambda' = \lambda C^{-m/\rho}$  であるワイブル分布に従う。したがって  $a_1$ ,  $a_2$  はワイブル分布に従う。  $\sigma_M$  としては最頻値  $\sigma_M = 278.3 \text{ N/mm}^2$  を用いる。

### 3.1 $t = 36.06 \text{ mm}$ : 塑性座屈

感度則は 2 乗則を適用できる。  $a_1$ ,  $a_2$  のパラメータは  $m_1 = 2.3532$ ,  $\lambda_1 = 6.361 \times 10^{-5}$ ,  $g_1 = -48.0$ ,  $m_2 = 1.06$ ,  $\lambda_2 = 1.647$ ,  $g_2 = 0$  である。結果を図-2(a) に示す。終局強度の確率密度関数は、降伏応力の確率密度関数とほぼ一致する。これは、2 乗則による強度の低下が降伏応力の変動に対して小さいからであると考えられる。

### 3.2 $t = 8.01 \text{ mm}$ : 塑性座屈から弾性座屈への遷移域

感度則は 2 乗則と 2/3 乗則の遷移域。現実の  $\epsilon$  の範囲を考慮すると 2/3 乗則を適用できる。2/3 乗則の切片は降伏応力に対して線形に変化しないが、最頻値以下の領域では線形に変化しているので、直線で近似する。  $a_1$ ,  $a_2$  のパラメータは、 $m_1 = 2.3532$ ,  $\lambda_1 = 8.852 \times 10^{-4}$ ,  $g_1 = -41.712$ ,  $m_2 = 3.18$ ,  $\lambda_2 = 2.081 \times 10^{-7}$ ,  $g_2 = 0$  である。結果を図-2(b) に示す。終局強度がだいたい  $30 \leq \sigma_u \leq 310$  の範囲内にあることが分かる。

### 3.3 $t = 6.56 \text{ mm}$ : 弾性座屈 (対称分岐)

感度則は 2/3 乗則を適用できる。  $t = 8.01 \text{ mm}$  と同様に 2/3 乗則の切片を直線で近似する。  $a_1$ ,  $a_2$  のパラメータは、 $m_1 = 2.3532$ ,  $\lambda_1 = 7.041 \times 10^{-5}$ ,  $g_1 = -17.28$ ,  $m_2 = 3.18$ ,  $\lambda_2 = 1.276 \times 10^{-4}$ ,  $g_2 = 0$  である。結果を図-2(c) に示す。

### 3.4 $t = 5.15 \text{ mm}$ : 弾性座屈 (荷重の極大点)

感度則は 1 乗則を適用できる。  $a_1$ ,  $a_2$  のパラメータは  $m_1 = 2.3532$ ,  $\lambda_1 = 5.560 \times 10^{-4}$ ,  $g_1 = 19.1$ ,  $m_2 = 2.120$ ,  $\lambda_2 = 3.836 \times 10^{-3}$ ,  $g_2 = 0$  である。結果を図-2(d) に示す。終局強度がだいたい  $120 \leq \sigma_u \leq 210$  の範囲内にあることが分かる。

## 4. 結論

これら 4 つの板厚における、終局強度の確率密度関数から、板厚の減少に伴い終局強度の確率変動の幅が減少していることが確認できる。またそれぞれ 4 つの板厚の終局強度の確率変動の特徴を見ると、塑性座屈するときは、初期たわみはあまり影響しないが、弾性座屈の場合、初期たわみと降伏応力の影響が大きいこ

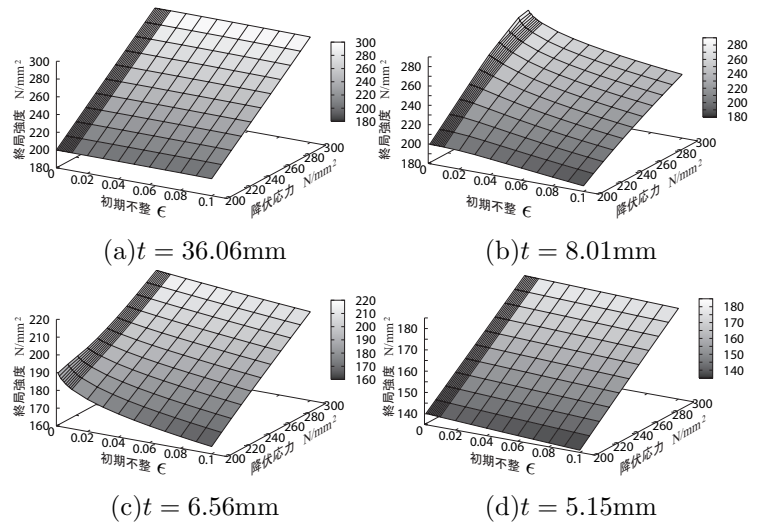


図-1 各板厚における初期不整感度関係

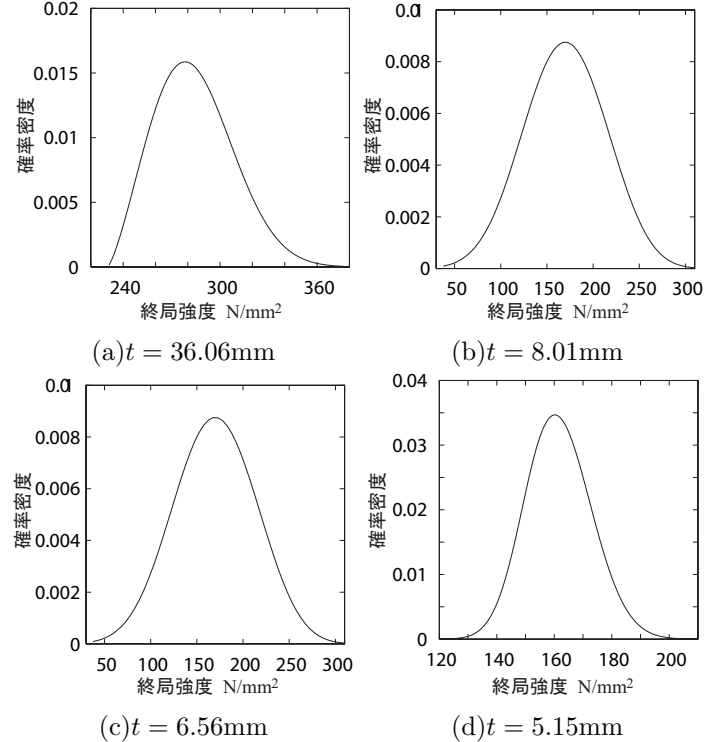


図-2 各板厚における終局強度の確率密度関数

とが確認できる。これらのことから、初期不整感度則によって、座屈強度の確率変動の体系的な記述が可能であると考えられる

## 参考文献

- 1) Koiter, W.T.: *On the Stability of Elastic Equilibrium*, Dissertation, Delft, Holland. Springer, 1945.
- 2) 池田清宏, 室田一雄: 構造系の座屈と分岐, コロナ社, 2001.
- 3) 大阪市立大学橋梁工学研究室, 日本構研情報 (株) 構造解析室: USSPversion4.0 ユーザーズ・マニュアル, 1999.
- 4) 渡邊 直: 板の弾塑性座屈荷重の確率変動の初期不整感度則による体系的記述, 東北大学工学部土木工学科卒業論文, 2006.