

# 微視的構造特性を考慮したゴム材の巨視的粘弾性挙動の評価

東北大学工学部 学生員 濱名康彰  
 東北大学大学院 正員 寺田賢二郎  
 東北大学大学院 正員 山田真幸  
 東北大学大学院 学生員 車谷麻緒

## 1. はじめに

工業材料として利用されているゴム材料をマイクロオーダーで観察すると、そのほとんどは天然ゴムや合成ゴムなどの純ゴムにカーボン等に代表される充填材が混入された非均質材料となっている。このような複合材料としてのゴム材料の巨視的力学特性は、その微視的力学挙動を反映して発現すると言われている。

本研究では、複合材料としてのゴム材料の粘弾性特性に着目し、均質化法に基づくマルチスケール解析手法を適用することにより、微視領域の幾何形状の違いがマクロ粘弾性特性に与える影響を調べる。

## 2. 均質化法に基づく粘弾性マルチスケール問題

### 2.1 ミクロ構造解析によるマクロ材料特性評価

均質化法の数学理論<sup>1)</sup>によれば、マクロ構造の支配方程式とその微視的非均質性を特徴づける周期的に分布するミクロ構造(以下、ユニットセル)についての支配方程式が導出され、後者と解くことで前者の材料特性を評価する数値材料試験が可能となる。すなわち、ユニットセルに対して得られる次の境界値問題に対して任意のマクロ変数をデータとする数値解析を実施して、ミクロ挙動の平均応答を評価することでマクロ的な材料特性(本研究では粘弾性特性)を得ることができる。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{grad}_s \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^1 \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \sim \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{任意の構成則}) \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{y}$  はユニットセル領域  $Y$  に設定した座標系であり、 $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{u}$  はそれぞれミクロスケールの応力、ひずみ、変位である。また、 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  はマクロひずみを表す一定ひずみで、 $\mathbf{u}^1$  はユニットセル境界で周期的な変位成分である。この  $\mathbf{u}^1$  の周期性はユニットセル表面に現れる表面力ベクトルの反周期性と等価であり、ミクロ表面力の表面平均から算出されるマクロ応力  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  を制御パラメータにとり、マクロひずみ  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  を未知量としてもよい。なお、マクロ応力とマクロひずみは  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  で定義されている。ここで、 $\langle \bullet \rangle$  はテンソル  $\bullet$  のユニットセル体積平均を表す。

### 2.2 ユニットセルを構成するゴム材の粘弾性構成則

本研究では、ゴム材料の粘弾性体と仮定して、式(2)の構成則に線形粘弾性構成則を導入する。純ゴムは等方性材料と仮定して体積変形は弾性的でせん断成分のみが粘弾性挙動を示すものとするれば、粘弾性構成則の一般形は次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = K \varepsilon_M \mathbf{1} + \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3)$$

ここで  $G$  は応力緩和関数と呼ばれる。 $G = G1$  であり、 $\mathbf{1}$  は2階の単位テンソル、 $\mathbf{e}$  はミクロひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}$  の偏差成分、

$\varepsilon_M$  は体積ひずみ、 $K$  は体積弾性係数である。

本研究では粘弾性構成モデルとして一般化 Maxwell モデルを採用する。このモデルの応力緩和関数は次式で与えられる。

$$G(t) = G_0 \left[ 1 - \sum_{i=1}^N g_i \right] + G_0 \sum_{i=1}^N g_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (4)$$

ここで、 $G_0, g_i, \tau_i$  はそれぞれ瞬間せん断弾性率、緩和係数、緩和時間である。

この一般化 Maxwell モデルについての貯蔵弾性率、損失弾性率を次のように与えられる。

$$G'(\omega) = G_0 \left[ 1 - \sum_{i=1}^N g_i \right] + G_0 \sum_{i=1}^N \frac{\tau_i^2 \omega^2}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \quad (5)$$

$$G''(\omega) = G_0 \sum_{i=1}^N \frac{\tau_i \omega}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \quad (6)$$

ここに

$$\tan \delta(\omega) = G''(\omega) / G'(\omega) \quad (7)$$

は損失係数と呼ばれ、エネルギー損失の指標となる。式(5)、式(6)は Prony 級数近似式と呼ばれており、応力緩和関数と貯蔵弾性率、損失弾性率の変換式となっている。

### 2.3 マクロ粘弾性特性の評価手順

上述の粘弾性モデルを導入してユニットセルに対する支配方程式(1)を解くことになるが、得られるミクロ応力とミクロひずみの体積平均量同士の関係はやはり粘弾性を示すものと期待される。本研究では、マクロ応答として得られる粘弾性構成則にも次のような一般化 Maxwell モデルを採用する。

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \tilde{K} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_M \mathbf{1} + \int_0^t \tilde{G}(t-\tau) \frac{d\tilde{\mathbf{e}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (8)$$

ここで、 $\tilde{\bullet}$  はマクロ的な物理量を表す。マクロ応力緩和関数  $\tilde{G}(t)$  は、マクロひずみ  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_M \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{e}}$  を定数として、マクロ応力の一つの成分のみが値持つようなミクロ解析を行うことで算出可能である。ただし、このようにして得られるマクロ応力緩和関数は時間的に離散データであるので、その時系列データを Prony 級数形のマクロ瞬間せん断弾性率、緩和係数、緩和時間  $\tilde{G}_0, \tilde{g}_i, \tilde{\tau}_i$  を最小二乗法により求め、マクロ貯蔵弾性率、損失弾性率を算定する。

## 3. 数値解析例

本節では、均質化法に基づく粘弾性マルチスケール解析手法を用いて材料試験を行うことにより、マクロ粘弾性特性の同定例を示す。

表-1 ミクロ構造の均質化弾性係数 (GPa) と等方性

	$D_{xx}^H$	$D_{yy}^H$	$D_{xy}^H$	$2D_{xy}^H / (D_{xx}^H + D_{yy}^H)$
棒状	4.0585	3.9296	0.6273	0.1571
円柱状	3.2476	3.2343	0.6130	0.1891

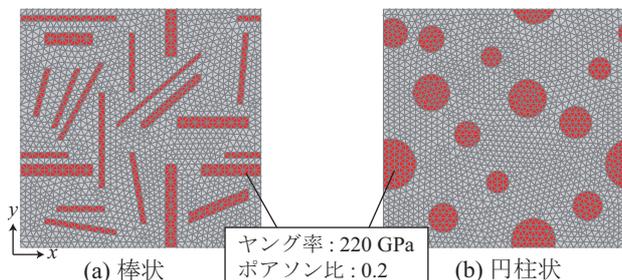


図-1 介在物分布の異なるマイクロモデル

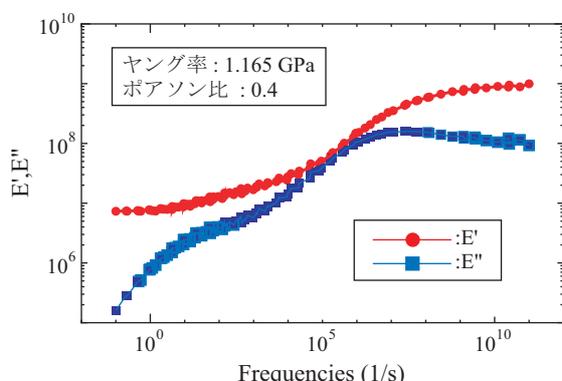


図-2 母材に使用するゴムの材料特性

### 3.1 解析条件

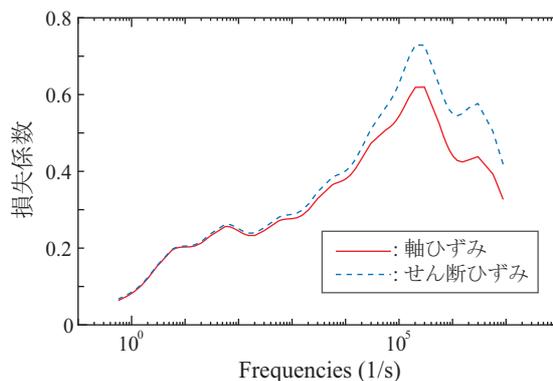
解析対象は図-1 に示されるような、母材と介在物の体積分率を等しくした2種類のマイクロ構造である。母材は図-2 に示される材料特性を有する粘弾性体、介在物は図-1 に付記した線形弾性体と仮定する。

### 3.2 結果と考察

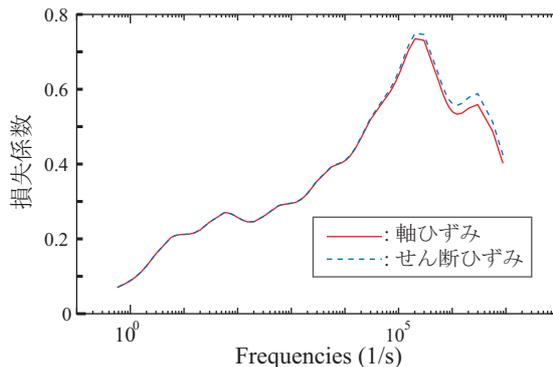
本研究ではマイクロ構造の弾性異方性(弾性特性)がマクロ粘弾性特性に与える影響を考察に加えるので、はじめに2つのマイクロ構造の均質化弾性係数をまとめた結果を表-1 に示す。この表から、介在物が棒状のモデルは、円柱状のそれに比べて、軸方向の弾性率が高く、また軸方向に対するせん断方向の弾性率の割合が小さいことが分かる。

次に、マイクロ構造の介在物の形状の違いがマクロ粘弾性特性に与える影響について考察する。まず数値材料試験におけるマクロひずみの載荷パターンによる損失係数を比較したものを図-3(a), (b) に示す。棒状のモデルでは、円柱状のそれに比べて、マクロひずみの載荷パターンによる差異が顕著に現れる。これは、円柱状のモデルに比べて、棒状のモデルの方が軸方向に対するせん断方向の弾性係数が小さいためと考えられる。

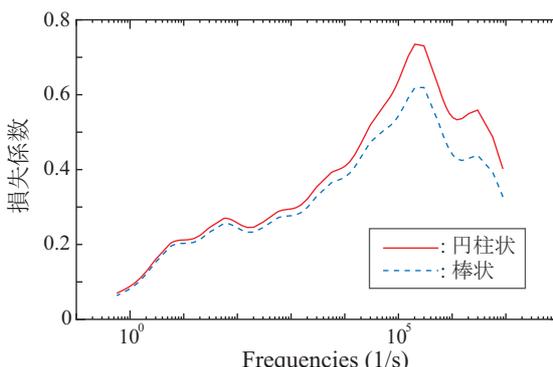
続いて、軸ひずみを与えた際のマイクロ幾何形状の違いによるマクロ損失係数を比較したものを図-3(c) に示す。棒



(a) ひずみパターンの違いによる損失係数の比較 (棒状)



(b) ひずみパターンの違いによる損失係数の比較 (円柱状)



(c) ミクロ構造に軸ひずみを与えて同定した損失係数の比較

図-3 数値材料試験による損失係数の解析結果

状のモデルでは、円柱状のそれに比べて、マクロ損失係数が小さくなる。これは軸方向の弾性係数の相違によるものであると考えられる。

以上をまとめると、マイクロ構造の幾何形状やそれに伴うマクロ弾性異方性の違いによって、マクロ粘弾性特性に差異が生じることが示された。

## 4. おわりに

本研究では、均質化法に基づくマルチスケール解析手法を適用することにより、マイクロ構造特性を反映したマクロ粘弾性特性を評価した。その結果、マイクロ構造の幾何形状やそれに伴うマクロ弾性異方性の違いが、マクロ粘弾性特性に影響を与えることを示した。

### 参考文献

- 1) 寺田賢二郎, 菊池昇: 均質化法入門, 丸善, 2003.
- 2) R.M. クリステンセン: 粘弾性力学の基礎, 雄松堂, 2000.