

III-43 マイクロメカニクスに基づく粒状体の構成則の定式化

東北大学 フェロー会員 ○岸野佑次, 学生会員 鄒 春躍

1. まえがき 粒状体の構成式の理論的誘導において, 平面的すべり面がしばしば仮定されるが, 例えば, 三軸状態を考えた場合, その対称性により, すべりが特定の平面上で卓越することにはならない. そこで, 本研究においては, 粒状供試体モデルの粒状要素法による数値試験¹⁾を行い, 滑動接触テンソルと呼ばれるすべりの統計的表現に基づき粒状体の塑性流動理論を構成した. 塑性流動則は散逸エネルギーの条件付き最大化問題²⁾の結果として得られる. 種々の载荷に対する塑性ひずみ増分について, 数値試験より直接得られる生データと理論を経由して予測した値を比較した結果, 極めてよく一致するという結論を得た.

2. 塑性流動則理論 応力増分 $d\sigma$ に対するひずみ増分を弾性部分と塑性部分に分け, $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$ (1) とおく. 弾性ひずみ増分は, コンプライアンス C_{ijkl} を用いて, 次式で与えられる. $d\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}d\sigma_{kl}$ (2) また, 塑性ひずみ増分は, 大きさを $d\alpha = \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$ とおけば, 次式のように表現できる. $d\varepsilon_{ij}^p = g_{ij}^p d\alpha$ (3) ここに, g_{ij}^p は正規化された塑性ひずみ増分であり, そのノルムは1である. 全ひずみ増分, 弾性ひずみ増分についても $d\alpha$ で正規化した量を, それぞれ, g_{ij} , g_{ij}^e と置くと, 次式が成立する. $(g_{ij} - g_{ij}^e)(g_{ij} - g_{ij}^e) = 1$ (4) ここで, 一様応力 σ の場に一樣ひずみ増分 g が生じるときの応力のする仕事を $\omega = \sigma_{ij}g_{ij} = \frac{3}{A} \int_A t_i d_i dA$ (5)

と表す. ここに, A は平均演算を行う球面, $t_i = \sigma_{ij}n_j$ は法線ベクトル n の面のトラクション, $d_i = g_{ij}n_j$ はひずみ増分 g により生じる変位勾配の n 方向成分である. 式(5)の積分はトラクションのする仕事の重みのない単純な平均化演算を表し, ガウスの定理を用いて同式を得る. ω の中の散逸部分は $\omega^p = \sigma_{ij}g_{ij}^p$ (6) である. ここで, 粒状体においては粒子間相対滑りに伴う摩擦によりエネルギーが散逸することに着目し, 式(5)に倣って, 滑りに伴う仕事のみに着目した平均化演算を $\phi = 3c \int_A \{t_i d_i - (t_i n_i)(d_j n_j)\} f(n) dA = h_{ij}g_{ij}$ (7)

と表す. $f(n)$ は滑り発生方向を表す確率密度関数であり, 摩擦に関与する応力と変位の成分としてせん断成分のみを考慮した. また, c は滑りが生じる程度を表すための定数で, 活性度定数と呼ぶ. ガウスの定理を用いて最終的に得られる右辺は, 散逸応力と呼ばれるテンソル $h_{ij} = 3c(\sigma_{ik}N_{kj} + \sigma_{jk}N_{ki} - 2\sigma_{kl}N_{kij})/2$ (8) を係数とするひずみ増分の一次式である. ここに, $N_{ij} = \int_A n_i n_j f(n) dA$ (9), $N_{ijkl} = \int_A n_i n_j n_k n_l f(n) dA$ (10)

を2階および4階の滑動接触テンソルと呼ぶ. 参考文献3)においては, 滑りが生じる粒子間接平面を滑動接触面と称し, 4階の滑動接触テンソルを用いることにより, 十分な一般性をもってその面の統計分布を表現できることを示したが, 式(7)の演算過程で, 同一の量が自然な形で導入されたことが注目される.

式(6)の巨視的塑性仕事と式(7)の散逸エネルギーが一致する条件 $\omega^p = \phi$, または $\sigma_{ij}(g_{ij} - g_{ij}^e) = h_{ij}g_{ij}$ (11) は塑性ひずみ成分間にひとつの拘束条件を与える. これは, 土質力学において応力ダイレイタンス関係と呼ばれるひずみ成分間の拘束条件式に相当する. 塑性ひずみの方向は散逸エネルギーを最大とるように生じると考えられる. 正規化塑性ひずみに関する拘束条件式, 式(4)と式(11)を考慮すれば, この条件は未定係数 A, B を含む Lagrange 関数 $\Pi(g) = \sigma_{ij}(g_{ij} - g_{ij}^e) - A(g_{ij} - g_{ij}^e)(g_{ij} - g_{ij}^e)/2 - B\{\sigma_{ij}(g_{ij} - g_{ij}^e) - h_{ij}g_{ij}\}$ (12)

の極値問題となる. Lagrange 関数の停留条件より次式を得る. $g_{ij}^p = \{\sigma_{ij} - B(\sigma_{ij} - h_{ij})\}/A$ (13)

式(11), (13)より, 次式を得る. $B = \{-h_{ij}g_{ij}^e A + \sigma_{ij}(\sigma_{ij} - h_{ij})\}/\{(\sigma_{ij} - h_{ij})(\sigma_{ij} - h_{ij})\}$ (14)

また, 式(4), (13), (14)より次式を得る. $\{(\sigma_{ij} - h_{ij})(\sigma_{ij} - h_{ij}) - (h_{ij}g_{ij}^e)^2\}A^2 = \sigma_{kl}\sigma_{kl}h_{ij}h_{ij} - (\sigma_{kl}h_{kl})^2$ (15)

この式は A に関する2次方程式である. 式(15)の右辺は正であるので, $(\sigma_{ij} - h_{ij})(\sigma_{ij} - h_{ij}) - (h_{ij}g_{ij}^e)^2 \geq 0$ (16) が解が存在する条件であり, これを塑性ひずみ発生条件とみなすことができる. 式(16)の正規化弾性ひずみ増分を元の弾性ひずみ増分に直して整理すると次式を得る. $(d\alpha)^2 \geq (h_{ij}d\varepsilon_{ij}^e)^2 / \{(\sigma_{ij} - h_{ij})(\sigma_{ij} - h_{ij})\}$ (17)

この条件の下, 式(15)の解は2つ存在するが, これらの解の中, 散逸エネルギーを最大とするものを解とすればよい. 上式左辺が零の場合は塑性ひずみがないことになるので, いわゆる中立载荷の条件は $h_{ij}d\varepsilon_{ij}^e = 0$ である. 式(17)より次の塑性ひずみ発生条件が得られる. $d\alpha = \lambda h_{ij}d\varepsilon_{ij}^e / \sqrt{(\sigma_{ij} - h_{ij})(\sigma_{ij} - h_{ij})}$ $\lambda \geq 1$ (18)

数値試験によれば塑性ひずみが発生する際には $h_{ij}d\varepsilon_{ij}^e > 0$ で, $\lambda > 1$ は応力増分の方角によらない定数である.

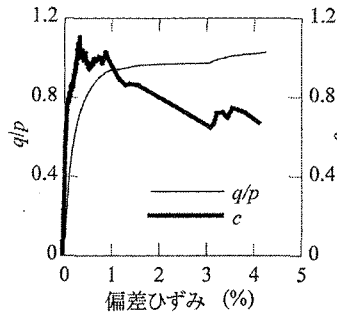


図-1 応力比と活性度係数の変化

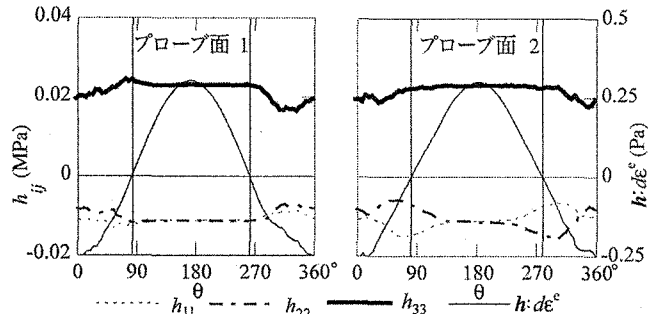


図-2 散逸応力および弾性ひずみとの内積

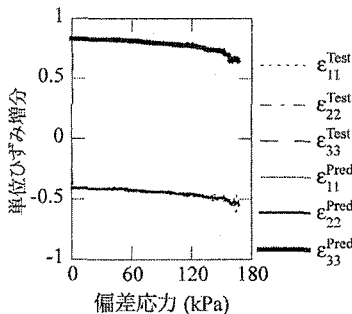


図-3 単位ひずみ増分(載荷試験)

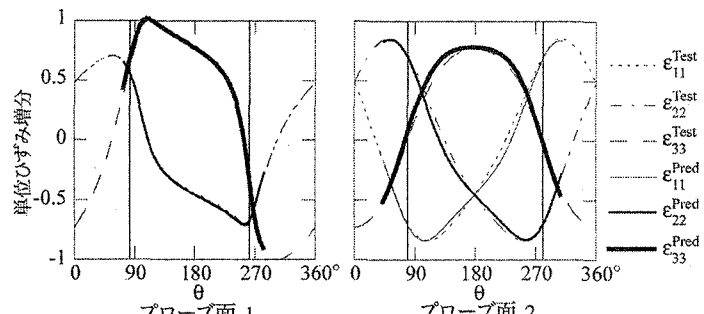


図-4 単位ひずみ増分(プローブ試験)

3. 数値試験による理論の検証 参考文献 3) と同様の粒状要素法数値試験に基づき理論の検証を行った。供試体モデルは、粒子数 1577 (中, 内部 685), 粒径 0.1~0.3mm の粒子のランダムパッキングよりなる球状モデルとした。法線, 接線方向のバネ定数は 40, 28 kN/m, 粒子間の摩擦角は 15°とした。初期拘束圧は 200 kPa, 単調載荷は x_3 方向のみの増分とした。ただし, 各載荷ステップ毎に分岐して除荷を行い弾性および塑性ひずみ増分を記録した。プローブ試験は偏差応力 60 kPa の点で行い, 応力プローブを 2つの面内 5°間隔で与えた。第 1 のプローブ面は主応力空間で初期応力ベクトルと現応力ベクトルを含む面, 第 2 のプローブ面は現応力ベクトルに直交する面とした。方向の表示は 2つのプローブ面の交線除荷方向を 0°とした。

図-1 に応力ひずみ関係を示す。同図には式(7)の活性度係数 c の値も示した。滑りの程度はせん断応力の増加とともに増加するが, ピークは応力のピークより先に現れる。式(9), (10)の 2, 4 階滑動接触テンソルは数値試験において粒子間すべりの発生を判定して求めることができ³⁾, これより式(8)の散逸応力が算定され, 前節の理論に従って, Lagrange の未定係数, ひずみ増分方向 (単位ひずみ増分と称する) を求めることができる。図-2 には 2 種類のプローブ試験における散逸応力と式(18)中の $h_{ij}d\epsilon_{ij}^e$ の値を示してある。縦線はこの値が零になる点を示す。一方, 数値試験において単位ひずみ増分を直接求めることができるので, これを理論による予測値と比較することができる。図-3 は側圧一定単調載荷経路における単位ひずみ増分を示したもので, 予測値と試験値は一致している。図-4 のプローブ試験においても両者はかなりの精度で一致していることがわかる。これらの図で縦線で区切られた中央の部分が塑性域であり, プローブ試験 1 においては塑性域が 180°の範囲, すなわち, いわゆる降伏曲面に尖りがない場合に相当し, この範囲で散逸応力 h_{ij} はほぼ一定である。一方, プローブ試験 2 においては塑性域が 180°を超え, 滑らかな降伏曲面の仮定は成立しない。これは散逸応力 h_{ij} が変化し, 塑性変形メカニズムが異なるためである。なお, 本理論では散逸応力 h_{ij} を与えさえすれば, 塑性ひずみ発生領域やひずみ増分方向が決定されるので, 降伏関数は必要としない。

参考文献 1) 鄒, 岸野, 水野谷: 数値粒状体モデルの一般的増分挙動, 応用力学論文集, Vol.8, pp.557-564, 2005. 2) 岸野: 散逸関数に基づく粒状体の流れ則の誘導, 土木学会論文集, No.511/III-30, pp.181-190, 1995. 3) 鄒, 岸野: 粒状体の塑性変形挙動を表すための滑動テンソルの定義とその考察, 平成 17 年度東北支部技術研究発表会講演概要集 III-42, 2006.