

III-42 粒状体の塑性変形挙動を表すための滑動接触テンソルの定義とその考察

東北大学 学生会員 ○鄒 春躍, フェロー会員 岸野佑次

1. はじめに

粒子の集合体である粒状材料の塑性挙動は、粒子間の摩擦性すべりに支配された現象である。したがって、粒子間の接触力および相対変位データが得られれば、粒状体内部におけるエネルギー散逸を微視的力学量の和として求めることができる。本研究では、参考文献1)に示した粒状体モデルによるシミュレーション試験（ π 平面上の荷重方向 $\beta=0^\circ$ ）の結果に基づいてこのような微視的力学量を実際に具体的に求め、微視的な接触力により算定した散逸エネルギーと巨視的応力により算定した散逸エネルギーとの対応関係について考察するとともに、すべりが生じる粒子間接触面の方向ベクトルの分布を表すための新たな統計量を定義し、これに基づいて、粒状材料内部において生じるすべりの統計的考察を行う。

2. 散逸エネルギー

図-1 に示すように接触粒子 A, B は接触点 C を介して接触している。C 点における局所座標系の基底ベクトルを t_n, t_ϕ, t_θ とする。荷重に伴う粒子 A, B の移動により、2 粒子間に相対変位が生じるとともに、接触力も変化する。粒子 A, B 間には接触点 C の接平面内における滑りが生じる時、この接平面を滑動接触面と称する。

粒子間接触力 $f_c = (f_n^c, f_\phi^c, f_\theta^c)^T$ が 2 粒子間の相対変位の中、バネによる弾性部分を除いた塑性相対変位増分 $\Delta D_c^p = (\Delta u_n^{pc}, \Delta u_\phi^{pc}, \Delta u_\theta^{pc})^T$ に対してする仕事を

$$w^{*p} = \frac{1}{V} \sum_{\text{loading step}} \sum_C (f_\phi^c \Delta u_\phi^{pc} + f_\theta^c \Delta u_\theta^{pc}) \quad (1)$$

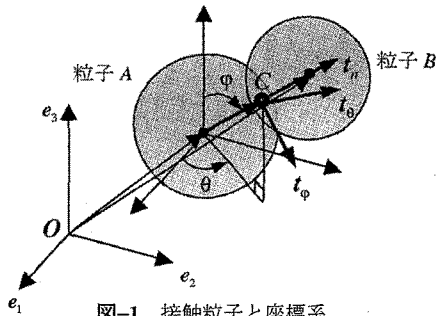


図-1 接触粒子と座標系

と定義し、巨視的応力 σ が塑性ひずみ増分 $\Delta \epsilon^p$ に対してする仕事を

$$w^p = \sum_{\text{loading step}} \sigma : \Delta \epsilon^p \quad (2)$$

と定義する。図-2 は w^{*p} と w^p の関係を示す。同図において w^{*p} が w^p より常に小さくなっていることが注目される。この理由は、すべりが生じるとき、粒子間のバネに蓄えられる弾性エネルギーの全てが解放されず、残留した弾性エネルギー増分が w^p の一部として評価されるためと考えられる。ただし、両者にはほぼ線形の関係が認められる。

3. 滑動接触テンソルの定義

供試体内部の滑動接触面の単位法線ベクトル n の $2j$ 個の積の平均値を $2j$ 階の滑動接触テンソルと定義する。

$$N_{i_1 i_2 \dots i_{2j}} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N n_{i_1}^\alpha n_{i_2}^\alpha \dots n_{i_{2j}}^\alpha \quad (3)$$

ここに、1 つの滑動接触面につき逆向の 2 つの法線ベクトルを同時に考慮するため、 N は滑動接触面の総数の 2 倍となる。また、2 階と 4 階の滑動接触テンソルは基本的なものであり、以下のように表される。

$$N_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N n_i^\alpha n_j^\alpha \quad (4)$$

$$N_{ijkl} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N n_i^\alpha n_j^\alpha n_k^\alpha n_l^\alpha \quad (5)$$

図-3 は偏差応力の大きさ $s=60\text{kPa}$ の応力点で行ったプローブ試験において 4 階の滑動接触テンソルを示す。応力プローブを 2 つの面内 5° 間隔で与えた。

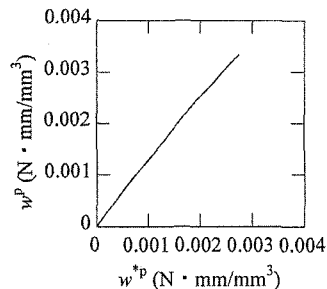


図-2 散逸エネルギーの比較図

プローブ面 1 は主応力空間で初期応力ベクトルと現応力ベクトルを含む面、プローブ面 2 は現応力ベクトルに直交する面とした。プローブ面 1 内のプローブ方向 $\theta = 90^\circ \sim 270^\circ$ の場合、滑動接触テンソルの値は一定で粒状供試体の塑性変形メカニズムは同一と考えられる。これに対し、プローブ面 2 内の応力プローブの载荷方向による変化がみられるため、プローブ面 2 内でプローブ方向によって塑性変形メカニズムが異なることを示唆している。これにより、試験から得られた N_{ijk} は応力状態の変化に伴って変化する状態量であると考えられる。

4. 滑動接触面の方向の密度分布関数

滑動接触面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の密度分布(立体角に対する確率密度)を $f(\mathbf{n})$ と表す。 $f(\mathbf{n})$ は単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の $2m$ 個の積までの関数で近似する場合、 $2m$ 階のテンソルのみで十分であるため、 $2m$ 個の積の関数で近似する場合の一般式は、

$$f(\mathbf{n}) = F_{i_1 \dots i_{2m}} n_{i_1} \dots n_{i_{2m}} \quad (6)$$

である。ここに、 $F_{i_1 \dots i_{2m}}$ は係数を与えるテンソルであり、金谷²⁾は $\mathbf{n}$ の分布データをもとに $F_{i_1 \dots i_{2m}}$ を最小二乗法により求める方法を示している。ここでは、滑動接触面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の 2 個および 4 個の積を基底関数とする 2 種類の密度分布関数 $f(\mathbf{n})$ の係数を算定するための式を導く。

1) $\mathbf{n}$ の 2 個の積の場合、密度分布関数 $f(\mathbf{n})$ は次式で与えられる。

$$f(\mathbf{n}) = b_{ij} n_i n_j \quad (7)$$

ここに、 b_{ij} は対称な 2 階テンソルである。式(4)で定義した 2 階の滑動接触テンソル N_{ij} を用いて、次のように表すことができる。

$$b_{ij} = \frac{15}{8\pi} \left(N_{ij} - \frac{1}{5} \delta_{ij} \right) \quad (8)$$

2) $\mathbf{n}$ の 4 個の積の場合、密度分布関数 $f(\mathbf{n})$ は次式で与えられる。

$$f(\mathbf{n}) = c_{ijkl} n_i n_j n_k n_l \quad (9)$$

ここに、 c_{ijkl} は対称な 4 階テンソルである。式(5)で定義した 4 階の滑動接触テンソル N_{ijkl} を用いて、次のように表すことができる。

$$c_{ijkl} = \frac{315}{32\pi} \left[N_{ijkl} - \frac{1}{9} (\delta_{ij} N_{kl} + \delta_{ik} N_{jl} + \delta_{il} N_{jk} + \delta_{jk} N_{il} + \delta_{jl} N_{ik} + \delta_{kl} N_{ij}) + \frac{1}{63} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \quad (10)$$

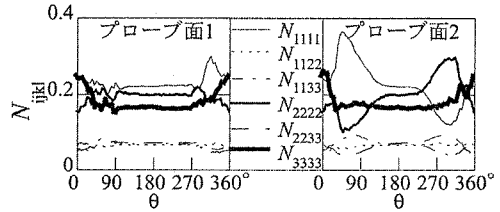


図-3 4 階の滑動接触テンソル(プローブ試験)

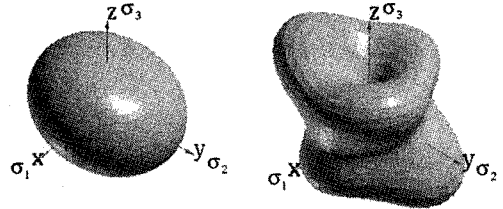


図-4 载荷試験の滑動接触面の密度分布関数

図-4 は式(7)と式(9)で定義した 2 種類の密度分布関数を求めた結果を示す。2 階テンソルに基づく密度分布関数の分布形状は楕円体であり、密度分布は応力主軸の方向で最大値をとることになり、滑動接触面の卓越方向を反映していないことになる。4 階テンソルに基づく密度分布関数の分布形状は卓越する方向が明確に現れ、滑動接触面の分布は 4 階テンソルを用いることによりはじめて表現することが可能になることがわかる。

5. 結論

本研究では、粒状体の弾塑性変形挙動を支配する滑動接触面は接触粒子の塑性相対変位により求められ、滑動接触面の分布特性についての考察を行い、次のような結論を得た。

- 1) 滑動接触テンソルはエネルギー散逸を伴う変形機構を表す統計量であると考えられる。
- 2) 数値試験で得られた滑動接触面の分布は 4 階の滑動接触テンソルで表した密度分布関数によりその特性を十分な一般性をもって表すことができる。

参考文献

- 1) 郷春躍, 岸野佑次, 水野谷勇輝: 数値粒状体モデルの一般的増分挙動, 応用力学論文集, Vol.8, pp.557-564, 2005.
- 2) Kanatai, K.: Distribution of directional data and fabric tensors, *International Journal of Engineering Science*, Vol.22, No.2, pp.149-164, 1984.