

I-37 面外変形を受ける平面セル構造体の マルチスケール解析に関する一考察

東北大学工学部 ○学生会員 本田宏孝
 東北大学大学院工学研究科 正会員 斉木 功
 東北大学大学院工学研究科 正会員 岩熊哲夫

1. まえがき

平面セル構造体は、剛性や質量比などの観点から高機能な材料であり様々な用途に利用される。しかし、その力学的特性には、構造や荷重によって強い異方性、非線形性、座屈による不安定化などの特徴を示す。このような面内変形に対して、面内の非線形マルチスケール解析が大植ら¹⁾によって行なわれた。平面セル構造体がジオテキスタイルなどに利用される場合は面内変形に加え面外変形も受ける。これに関しては、面外変形を考慮した線形ミクロスケール解析が著者ら²⁾によって行なわれた。本報告では面外変形を考慮した、マクロ、ミクロの両スケールでの幾何学的非線形解析を行なうための、非線形マルチスケール解析手法を提案する。

2. 一般化収束論による平板の非線形2変数境界値問題の定式化

図-1に示すような大きさ ϵY ($\epsilon \ll 1$)の平面骨組が面内に周期的に配置された構造物を解析対象とする。図中、 Y として示された領域が $1/\epsilon$ を乗じることにより拡大された微視構造であり、もとの対象領域ではこの微視構造の大きさが ϵY となる。この平面構造は、Kirchhoffの仮定に従う薄肉平板と仮定し、中立面を含む領域を Ω 、その境界を $\partial\Omega$ とする。この解析対象に対し、著者ら²⁾が示した一般化収束論による面外変形に対する平板の線形2変数境界値問題の定式化を基礎として、面外変形を考慮した平板の非線形2変数境界値問題を導く。

面外たわみ w とたわみ角 θ の関係、 $\theta = -\nabla w$ を拘束条件とし、Lagrange未定数法により、この拘束条件を組み込んだ汎関数 Π

$$\Pi := \int_{\Omega} W^m(\nabla u, \nabla w) + W^b(\nabla \theta) \, d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot u + q w \, d\Omega - \int_{\Omega} Q \cdot (\nabla w + \theta) \, d\Omega \quad (1)$$

を定義すると、平板の境界値問題はこの汎関数を停留させる問題となる。ここに、 f は外力、 u は面内変位である。 W^m 、 W^b はひずみエネルギー関数であり、それぞれ

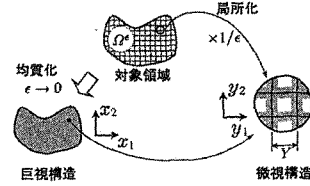


図-1 平面セル構造体

れ膜力・膜ひずみおよび曲げモーメント・曲率関係

$$N = \frac{\partial W^m}{\partial \left(\epsilon + \frac{\nabla w \otimes \nabla w}{2} \right)}, \quad M = \frac{\partial W^b}{\partial \nabla \theta} \quad (2)$$

を規定するものとする。この汎関数の独立変数は ϵ 、 θ 、 w 、 Q であり、 Q は未定定数である。この汎関数 Π の $\epsilon \rightarrow 0$ の極限すなわち均質化汎関数 Π^H は

$$\begin{aligned}
 \Pi^H = & \int_{\Omega} W^m(\nabla_x u^0 + \nabla_y u^1, \nabla_x w^0 + \nabla_y w^1) \, d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} W^b(\nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1) \, d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} f \cdot u^0 + q w^0 \, d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} Q \cdot (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 + \theta^0) \, d\Omega \quad (3)
 \end{aligned}$$

となる。ここで上付きの0および1はそれぞれマクロスケール、ミクロスケールに属する物理量であることを意味する。このとき、膜ひずみ ∇u 、たわみ角 ∇w 、曲率 $\nabla \theta$ は、それぞれ

$$\nabla u \rightarrow \nabla_x u^0 + \nabla_y u^1 \quad (4)$$

$$\nabla w \rightarrow \nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 \quad (5)$$

$$\nabla \theta \rightarrow \nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1 \quad (6)$$

に収束することが一般化収束論により保証される。この均質化汎関数のマクロスケールの変数に関する停留条件からマクロスケール釣合式

$$\nabla_x \nabla_x : \tilde{M} = \tilde{N} : \nabla_x \nabla_x w^0 - \tilde{q} - \tilde{f} \cdot \nabla_x w^0 \quad (7)$$

および、ミクロスケールの変数に関する停留条件からミクロスケール釣合式

$$\nabla_y \nabla_y : M^0 = 0 \quad (8)$$

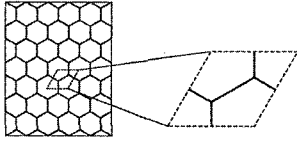


図-2 正六角形ハニカムとその代表体積要素

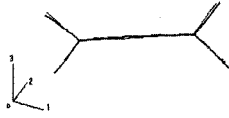


図-3 ケース1の代表体積要素の変形



図-4 ケース2の代表体積要素の変形

$$N^0 : \nabla_y \nabla_y w^1 + \nabla_y \cdot Q^0 = 0 \quad (9)$$

が得られる。ここで $\bar{\bullet}$ は代表体積要素における平均量であり

$$\bar{\bullet} := \langle \bullet \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \bullet \, dY$$

により定義した。

ミクロスケールの釣合式 (8)(9) は実変形に起因する内力の自己釣り合い式になっている。ここでは、著者ら²⁾の面外ミクロスケール問題と同様に、マクロ変形(曲率)に相当する相対変位(ここでは回転角および変位)を境界条件として解析を行う。式 (6) で表される全曲率をミクロスケール y により積分することにより、代表体積要素における面内問題の実変位に相当する実回転角 λ は

$$\lambda(x, y) = \left\{ \nabla_x \theta^0(x) \right\} \cdot y + \theta^1(x, y) \quad (10)$$

と表される。同様に、実面外変位 ζ は式 (5) で表されるたわみ角をミクロスケール y により積分することにより

$$\zeta(x, y) = -y \cdot \left\{ \nabla_x \theta^0(x) \right\} \cdot y + \left\{ \nabla_x w^0(x) \right\} \cdot y + w^1(y) \quad (11)$$

と表される。上記した実回転角、実面外変位を用いてミクロスケールでの周期性を考慮し、マクロ曲率 $\nabla_x \theta^0$ に相当する相対回転角、およびマクロたわみ角に相当する相対面外変位を代表体積要素に与えることで、その応答としてマクロ曲げモーメント $\bar{M}$ が算出可能となる。

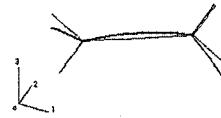


図-5 ケース3の代表体積要素の変形

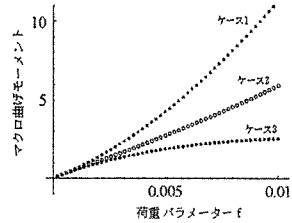


図-6 曲げモーメントと曲率の関係

3. 非線形ミクロスケール解析例

図-2 に示す正六角形ハニカムの代表体積要素に対して、引張と圧縮と曲げを加え、幾何剛性の影響を解析した。ここで曲げ変形 w_{ij} を

$$w_{ij} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j = 1, 2)$$

面内ひずみ u_{ij} を

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2)$$

と定義する。以下のすべてのケースで曲げ変形 $w_{11} = f$, $w_{12} = w_{22} = 0$, および面内ひずみ $u_{1,2} = u_{2,2} = 0$ を与え、ケース1では $u_{1,1} = f$, ケース2では $u_{1,1} = 0$, ケース3では $u_{1,1} = -0.5f$ とした。図-6 にそれぞれの荷重パラメータ f とマクロ曲げモーメント $\bar{M}$ の関係を示した。ケース1のように引張を加えたときには曲げ剛性が増加し、ケース3のような圧縮の場合には曲げ剛性が減少しているのがわかる。

参考文献

- 1) 大植 健, 斉木 功, 寺田賢二郎, 中島章典: 骨組要素を用いたセル構造材料のための非線形マルチスケールモデリング, 土木学会論文集, No.724/I-62, pp.249-256, 2003.
- 2) 斉木 功, 佐野道徳, 中島章典: はり・平板構造に対する均質化理論の適用に関する一考察, 応用力学論文集, Vol.7, pp.407-413, 2004.