

I-33

Euler 型有限被覆法の開発とマルチスケール解析への適用

東北大学 学生会員 ○丸山敦志
 東北大学 学生会員 車谷麻緒
 東北大学 正員 寺田賢二郎

1. 始めに

固体の大変形解析において、一般的に用いられる界面追跡型の解析手法では要素の潰れによる解析破綻が問題となるが、近年、空間固定メッシュを用いる Euler 型解法がこれを克服しようとして期待されている。従来は動的陽解法の枠組みで研究がなされてきたが寺田らの研究グループ²⁾は、陰解法に基づく準静的解析を対象として、Euler 型メッシュ制御による有限被覆法（Euler 型有限被覆法）を提案している。有限被覆法では近似関数の定義域となる解析メッシュを物理領域と独立に設定するため、有限要素法の枠組みでは扱えない、Euler 型解法に特有の要素内部に移動境界が存在する場合を許容しうる。また、非線形解析を行う場合、各増分ステップにおいて固定メッシュとは独立に物理領域の運動を追跡し、得られた平衡状態を固定メッシュに近似的に移流させることで Euler 型の大変形解析が可能となる。

本論文では、これまで均質体への適用のみに限られてきた Euler 型有限被覆法を、材料界面を伴う非均質体解析に拡張するとともに均質化法に基づくマルチスケール解析³⁾にも適用する。

2. Euler 型有限被覆法

Euler 型有限被覆法では空間固定の解析メッシュを物理領域と独立に設定する。非線形解析を行う場合、各増分ステップにおいて固定メッシュとは独立に物理領域の運動を追跡し、得られた平衡状態を固定メッシュに近似的に移流させることで Euler 型の大変形解析が可能となる。以下では、有限被覆法の近似概念を概説し、次いで、有限被覆法による Euler 型の陰解法アルゴリズムを説明する。

2.1 有限被覆法における近似概念

有限被覆法では、“近似関数の定義される数学領域（数学被覆）”と“支配方程式を満足すべき物理領域（物理被覆）”を別々に定義する。ここで、数学領域 Ω^M は、数学被覆 M と呼ばれる N_M 個の部分領域によって形成される。一方、物理被覆 P_I は、数学被覆 M_I と物理領域 $\Omega := B$ との共通領域 $M_I \cap \Omega$ として定義にされる。

FCM では、変位の近似を重み関数 w_I と被覆（変位）関数 f_I という2つの関数の組み合わせによって表現する。重み関数 w_I は、物理領域とは無関係に、各数学被覆 M_I ごとに次式のように定義される。

$$w_I(x) \geq 0 \text{ on } x \in M_I, \quad w_I(x) = 0 \text{ on } x \notin M_I \quad (1)$$

この条件に加え、重み関数 w_I が PU 条件として知られる以下の条件を満足することで近似解の連続性が保証される。

$$\sum_{I=1}^{N_M} w_I(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega_M \quad (2)$$

一方、被覆関数 f_I は、変位など物理量的な意味を与える関数であり、各物理被覆ごとに次式のように与えられる。

$$f_I^{[\alpha]}(x) = \sum_{i=0}^m p_i(x) a_{iI}^{[\alpha]} \quad \text{on } x \in P_I^{[\alpha]} \quad (3)$$

ここで、 $a_{iI}^{[\alpha]}$ は定数係数の未知パラメータであり、 $p_i(x)$ は任意の関数である。また、添え字 α は構成材料の種類を表している。FCM では、これらの重み関数と被覆関数を用いて変位場 $u(x)$ を次式のように近似する。

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{I=1}^{N_M} w_I(x) f_I^{[\alpha]}(x)$$

2.2 有限被覆法における Euler 型陰解法アルゴリズム

Euler 型有限被覆法では、増分解法における各時間ステップを Lagrange ステップと移流ステップという2つのサブステップで構成し、以下の手順により、空間固定の Eulerian メッシュ上で物体の平衡状態を更新する。

1. (Lagrange ステップ)

Eulerian メッシュとは独立に設定した Lagrangian メッシュを用いて物体運動を追跡し、荷重増分に対する平衡状態を算出する。

2. (移流ステップ)

- (a) 更新された物体配置と Eulerian メッシュから新たな物理被覆を定義する。
- (b) Lagrangian メッシュ上で定義された物理量を Eulerian メッシュに投影する。

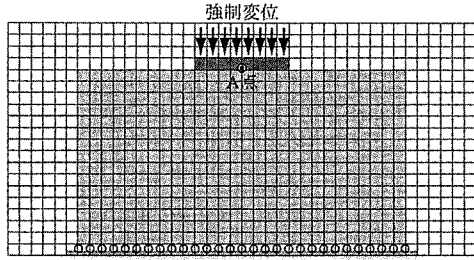
なお、各時間ステップにおける参照配置として前ステップで更新された Eulerian メッシュを Lagrangian メッシュとして転用する。(移流ステップ)-(b)では、Eulerian メッシュの各評価点における変数値を変形した Lagrangian メッシュの値を用いて補間する。また、Euler 型解法に特有の界面捕獲法として、境界上に配置した Master point と呼ばれる点の運動を Lagrange 的に追跡する。

3. マルチスケール解析解析手法への拡張

以下では、これまで均質体への適用のみに限られてきた Euler 型有限被覆法を、材料界面を伴う非均質体解析に拡張するとともに均質化法に基づくマルチスケール解析³⁾にも適用する。

3.1 材料界面の導入

有限被覆法では、非均質体を対象とする場合に各物理領域ごとに解析メッシュを設定する。また、前述のように数学領域を物理領域と独立に設定するため、Dirichlet 境界条件の定義されている境界上あるいは材料界面上の物質点が解析自由度を有するとは限らない。そこで、本研究ではこの種々の連続条件を Penalty 法に基づいて近似的に満足させる。



超弾性構成モデル：neo-Hooke's model $E=100[\text{GPa}]$, $\nu=0.3$
領域寸法：28×15[m] 格子幅：1[m]

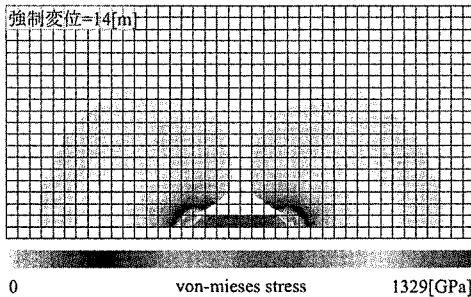


図-1 Euler型押し込み解析

3.2 均質化法に基づく2変数境界値問題

2変数運動学³⁾により幾何学的非線形性を考慮した均質化法に基づくマルチスケールモデリングでは、2つのスケールの現配置における釣り合い式は各スケールの位置ベクトル $x \in B, y \in \mathcal{Y}$ を変数として以下のように与えられる。

・ミクロスケール：

$$\int_{\mathcal{Y}} \sigma^0(x, y) : (\eta^1 \otimes \nabla_y) dy = 0, \forall \eta^1 \in \mathcal{V}_y^{\text{per}}, \quad (4)$$

$$\sigma^0(x, y) \sim F^0 \text{ [appropriate constitutive equations]} \quad (5)$$

$$F^0 = (u^0 \otimes \nabla_x) + (u^1 \otimes \nabla_y) + 1 \quad (6)$$

$$\mathcal{V}_y^{\text{per}} = \{v : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid v_i \in W^{1,p}; \mathcal{Y}\text{-periodic}\} \quad (7)$$

・マクロスケール：

$$\int_B \bar{\sigma}(x) : (\eta^0 \otimes \nabla_x) dx - g_{\text{ext}}(\eta^0) = 0, \forall \eta^0 \in \mathcal{V}_B \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}(x) = \langle \sigma^0 \rangle := \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} \sigma^0(x, y) dy \quad (9)$$

$$\bar{F} = (u^0 \otimes \nabla_x) + 1 \quad (10)$$

$$\mathcal{V}_B = \{v : B \rightarrow \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid v_i \in W^{1,p}, v = 0 \text{ on } \Gamma_u\} \quad (11)$$

ここで、 $\mathcal{V}_y^{\text{per}}$ はミクロ構造の物理領域であり、単位周期構造 (ユニットセル) として理想化された代表体積要素の現配置である。これに対して $\mathcal{V}_B$ は、等価な均質体とみなされるマクロ構造の現配置における物理領域である。また、 σ^0, F^0, u^1 は、それぞれ、 x を定数パラメータとみなしたミクロスケールの Cauchy 応力、変形勾配、周期変位場、 $\bar{\sigma}, \bar{F}, u^0$ は対応するマクロスケールの変数である。

3.3 数値解析例

以下では、Euler 型有限被覆法を用いた数値解析例を示す。なお、材料の構成モデルとしては、neo-Hooke 型の超弾性構成モデルを用いた。

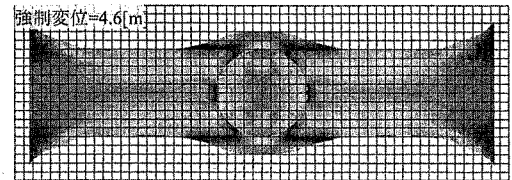
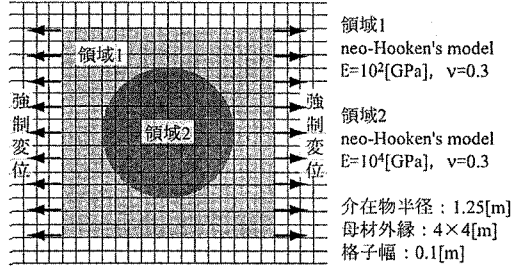


図-2 円形介在物を有した構造に対する Euler 型解析

3.3.1 Euler 型押し込み解析

超弾性体を対象として図-1 のような押し込み解析を行った。なお、図-1 には、押し込み変位 14[m] に対応する変形図と応力分布も併記してある。このような押し込み解析は、一般的な Lagrange 型有限要素法を用いた場合、メッシュの潰れによる解析破綻が問題となるが、Euler 型有限被覆法を用いた場合、このような問題を回避できることが確認できる。

3.3.2 円形介在物を有した構造に対する Euler 型解析

図-2 のような材料メソ構造に対する一軸引張の解析を行った。なお、図中には、強制変位 4.6[m] に対応する変形図と応力分布も併記してある。ここでも、材料界面を伴う非均質構造に対してメッシュの潰れを意識することなく所望の結果が得られており、Euler 型有限被覆法の有効性が主張できる。

4. 終わりに

本研究では、著者らが超弾性体に対する準静的問題を対象として提案している Eulerian 型有限被覆法の開発の一環として、材料界面を伴う非均質体解析への拡張と均質化法に基づくマルチスケール解析への適用を行った。また、数値解析例として、押し込み解析や円形介在物を有した構造解析を行い、本手法の大変形解析ならびに非均質体解析に対する有効性を検証した。

参考文献

- 1) D.J. Benson: Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 99, pp.235-394, 1992.
- 2) Terada, K. and Asai M.: Finite cover method for physically and geometrically nonlinear problems, In: M. Griebel, M.A. Sshweitzer (eds.), *Meshfree Method for Partial Differential Equations*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer-Verlag, Berlin, 2004: 169-190.
- 3) K. Terada, I. Saiki, K. Matsui and Y. Yamakawa: Two-scale kinematics and linearization for simultaneous two-scale analysis of periodic heterogeneous solids at finite strain, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 192, Issues 31-32, 1 August 2003, Pages 3531-3563.