

I-13 一般化高次理論に基づく平板・はり有限要素解析の精度改善の試み

福島 高 専 正 員 根 岸 嘉 和

1. 緒 言

本報告は、著者らが先に提案した平板・はりに関する一般化高次理論¹⁾の考え方を、有限要素法に用いた数値解析法の構築によって、平板・はりの有限要素解析の精密化と一般化高次理論の有用性の拡大を目指す試みの一つである。ここでは前報²⁾の純曲げ挙動解析に、曲げに伴う伸縮挙動を重ね合わせた一般的な曲げ解析に関して平板・はりの3次理論要素まで開発し、それらの修正効果を中心に、厚さ・高さ方向応力成分のつり合い法による補正結果について報告する。

2. 一般化高次理論に基づく精密化有限要素法の構築

1) 2方向平板要素：

Fig. 1に示す座標系のもとで、平板（均質等方性）の上表面に荷重 $p(x, y)$ が鉛直下向きに載荷された問題に関して、マトリックス剛性方程式を誘導する。

平板長方形要素の変位成分 $u_i: i=x, y, z$ を、次式のように厚さ方向座標 z のベキ級数(N :理論次数)で展開し、厚さ方向座標 z のベキ乗 z^n と $12N$ 個の未知係数 $\alpha_{i(n)}^{(j, m)}$ を含む変位関数 $u_{i(n)}(x, y)$ の積で仮定する。

$$u_i = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n u_{i(n)}(x, y) = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n \sum_m \sum_l \alpha_{i(n)}^{(j, m)} x^j y^m \quad (1)$$

例えば、曲げ挙動の変位関数には、各次数とも次式：

$$\begin{aligned} u_{z(n)} &= (n+1) \{ \alpha_{z(n)}^{(0,0)} + \alpha_{z(n)}^{(1,0)} x + \alpha_{z(n)}^{(0,1)} y + \alpha_{z(n)}^{(2,0)} x^2/2 \\ &\quad + \alpha_{z(n)}^{(0,2)} y^2/2 + \alpha_{z(n)}^{(2,1)} x^2 y/2 + \alpha_{z(n)}^{(1,2)} x y^2/2 \}, n=0, 2, 4, \dots \\ u_{\beta(n)} &= \alpha_{\beta(n)}^{(0,0)} + \alpha_{\beta(n)}^{(1,0)} x + \alpha_{\beta(n)}^{(0,1)} y + \alpha_{\beta(n)}^{(2,1)} x y, \beta=x, y \\ \alpha_{z(n)}^{(2,0)} &= -\alpha_{x(n+1)}^{(1,0)}, \alpha_{z(n)}^{(2,1)} = -\alpha_{x(n+1)}^{(0,1)}, \\ \alpha_{z(n)}^{(0,2)} &= -\alpha_{y(n+1)}^{(1,0)}, \alpha_{z(n)}^{(1,2)} = -\alpha_{y(n+1)}^{(0,1)} \end{aligned} \quad (2)$$

の様に変位係数間の従属性を導入して、古典平曲げ板理論要素と同じ自由度でせん断変形を考慮しつつ、面外せん断ひずみのゆがみ方向変化率をゼロ($\varepsilon_{\beta, \beta} = 0$)と置いて、薄板の場合の精度低下を回避したGreimann-Lyñ³⁾の変位関数を用いる。

2) 1方向平板・はり要素：

式(1)の y 方向成分ならびに y 方向変化を無視して1次元化した変位関数を用いる。また他方、次式の1変数の変位関数 $u_{i(n)}(x)$ も使い、軸方向変位関数の高次化の効果についても検証する。

$$u_i = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n u_{i(n)}(x) = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n \sum_l \alpha_{i(n)}^{(l)} N^{(l)}(\xi) \quad (3)$$

上式における $N^{(l)}(\xi); \xi = x/(a/2)$ は、直接的に未知節点変位係数 $\alpha_{i(n)}^{(l)}$ を係数とする変位関数として次式で与える。

$$\begin{aligned} N^{(l \pm 1)} &= (1 \pm \xi)/2 \\ N^{(l)} &= (1 - \xi^2) \xi^{l-2}, l \geq 2 \end{aligned} \quad (4)$$

すなわち、要素両端の節点でそれぞれ $l=0, 0-1$ となる直線変化($l=-1, +1$)に、両節点で0になる無節点高次成分を順次(4次分布まで： $l=2 \sim 4$)採用したものである。

これらの変位仮定に基づき、仮想仕事の原理によって、マトリックス剛性方程式を誘導する。

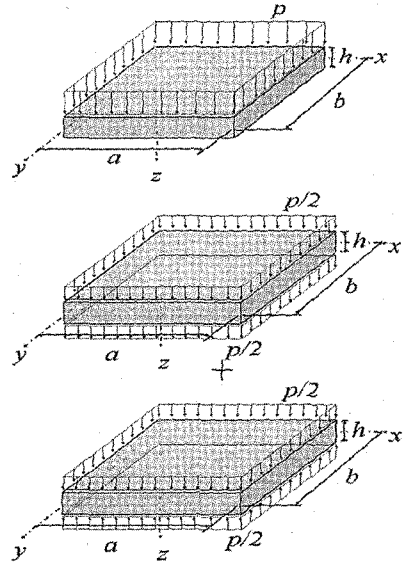
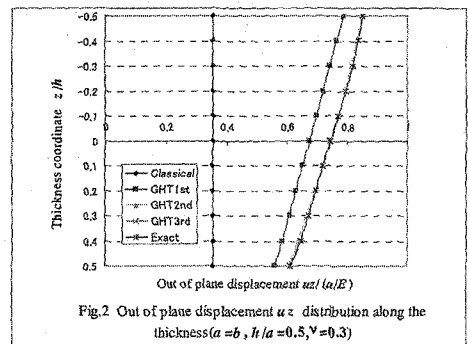
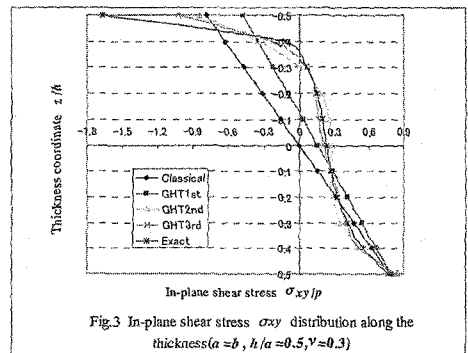


Fig.1 Geometry of plate and coordinate system


 Fig.2 Out of plane displacement w distribution along the thickness ($a=b, h/a=0.5, \nu=0.3$)

 Fig.3 In-plane shear stress σ_{xy} distribution along the thickness ($a=b, h/a=0.5, \nu=0.3$)

3. 解析例と精度特性

1) 上面に等分布荷重 p を載荷した周辺単純支持正方形板 :

Fig.1 に示す正方形厚板 ($a=b, h/a=0.5, \nu=0.3$) に等分布荷重 p が満載された場合を、本手法の1次理論要素 (GHT1st), 2次理論要素 (GHT2nd), 3次理論要素 (GHT3rd) の各有限要素法で解く。同時に Kirchhoff-Love の古典平板曲げ理論に基づく有限要素法 (Classical) を用いて解析し、3次元弾性論の厳密解⁴⁾ との比較を通じて精度特性の検証を行った。

Fig.2 に板中央位置での鉛直 u_z の板厚方向分布を示す。Classical はたわみの一定値だが、GHT1st はせん断変形と伸縮成分が考慮された直線で改善され、GHT2nd, GHT3rd の値が順次高次の曲線分布を示し、ほぼ厳密解に一致している。

なお面内変位 u_x, u_y ならびに曲げ応力 σ_{xx}, σ_{yy} の結果もこの u_z とほぼ同等の精度特性を示し、GHT2nd, GHT3rd はほぼ厳密解に一致した分布を与えている。

Fig.3 に面内応力の解析例として板の隅角位置での面内せん断応力 σ_{xy} の板厚方向分布を示す。理論次数の高次化に伴い精度改善がなされて、GHT3rd の値は厳密解に近い曲線分布を与えているが、荷重載荷面近くの応力急増は表し得ず、誤差を伴った曲線となっている。

Fig.4 に変位・面内応力の解と比べて解析精度が低下する面外応力の解析例として、まず板端面中央位置での面外せん断応力 σ_{xz} の板厚方向分布を示す。理論次数の高次化に伴い精度改善がなされているが、GHT3rd の値も荷重載荷面近くの応力急増を表し得ず全域にわたりにかなりの誤差を伴った曲線となっている。また、図中には、つり合い法 (面内応力とのつり合いと上下表面の境界条件を考慮して、面外応力を求め直す修正法) により GHT3rd の解を修正した解 GHT3-eq を示したが、一般化高次理論の解析解におけるような良好な精度改善には至っていないことがわかる。この原因の一つとしては、面内変位関数の低次限定性が挙げられよう。

Fig.5 に他の面外応力である板中央位置での面外垂直応力 σ_{zz} の板厚方向分布を示す。GHT3rd の値が誤差を含みながら最も厳密解に近い曲線分布を与え、低次の理論要素になるに従って GHT2nd, GHT1st と誤差が増大している。なお、この場合に関しては、つり合い法による補正値解 GHT3-eq はかなり厳密解に近似した分布を与えており修正の効果が認められる。

2) 正弦分布荷重を受ける無限はり:

Fig.6 に示すような、上辺に短周期で変動する正弦分布荷重 $p=p\sin(\pi x/l)$ ($h/l=1.5$) を受ける無限ばりを解いた。

Fig.7 に解析結果の1例として曲げ応力 σ_{xx} の高さ方向分布を示す。この場合も理論次数の増加とともに精度が向上し、このように極端な短周期変動幅の荷重に対しても GHT3rd の値はほぼ厳密解に一致している。

4. 結 言

以上の結果、一般化高次理論に基づく有限要素法は、理論次数の高次化にともなって精度が向上し、3次元理論要素解で厳密解に近い高精度な解が得られることが検証された。

本研究により、3次元弾性論の厳密解を目標値とする精密化有限要素法が構築され一般化高次理論の有用化が図られた。

他の面外応力改善の試みについては当日発表する。

参考文献

- 1) Negishi Y., K.Hirashima : JSME International Journal, Series A, Vol.37, pp.272-281, No.3, 1994.
- 2) 根岸ら : 土木学会東北支部技術研究発表会, I-33, pp.86-87, I-34, pp.88-89, 2004.
- 3) Greimann L.F., P.P.Lynn : Nuclear Engineering and Design, Vol.14, pp.223-230, 1970.
- 4) Pagano N.J. : J. Composite Materials, Vol.4, pp.20-23, 1970.

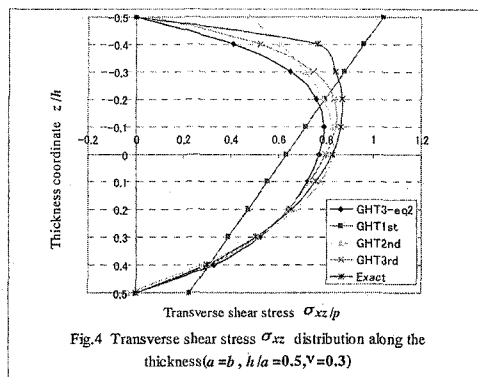


Fig.4 Transverse shear stress σ_{xz} distribution along the thickness ($a=b, h/a=0.5, \nu=0.3$)

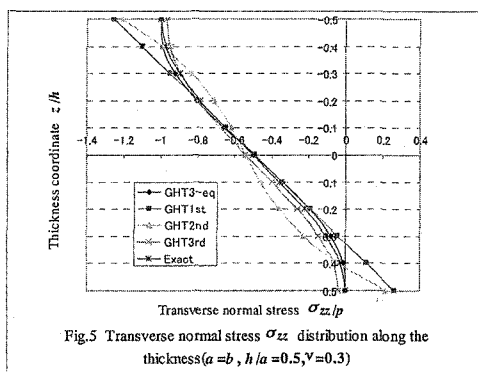


Fig.5 Transverse normal stress σ_{zz} distribution along the thickness ($a=b, h/a=0.5, \nu=0.3$)

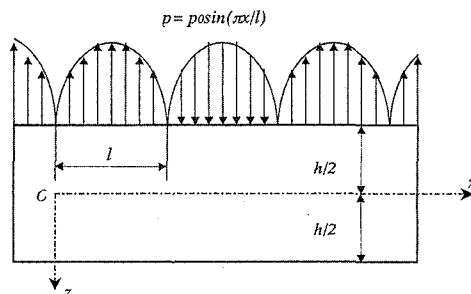


Fig.6 Infinite plate subjected to sinusoidal loading

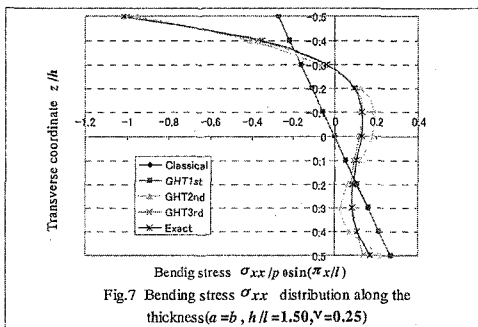


Fig.7 Bending stress σ_{xx} distribution along the thickness ($a=b, h/l=1.50, \nu=0.25$)