

I - 6 構造物の強度の初期不整依存特性とその確率評価法

東北大学 学〇 森川心平 正 池田清宏 正 山川優樹

1. はじめに

座屈を起こす構造系の座屈強度は、初期たわみや残留応力などの初期不整によって大きく低下してしまうことが知られている。Koiter¹⁾は、強度の初期依存特性を表す初期不整感度則を各種の特異点に対して求めた。また、初期不整の種類を1次不整と2次不整に分類し、構造系全体の初期不整感度を記述する、一般化初期不整感度則が池田、藤沢らによって提案されている²⁾。

一方で、実際の構造物にはどのような初期不整が作用するのか不明であるので、初期不整の確率変動による座屈荷重の確率変動を知ることが必要となる。

本研究では、構造系の単純対称分岐点における初期不整感度則から強度低下量の確率密度関数を導出し、その妥当性を検証し、実構造物への適用例を示す。

2. 一般化初期不整感度則

初期不整を含む構造系の非線形釣合い式を

$$F(u, f, \epsilon d) = 0 \quad (1)$$

とする。ここで、 u は変位ベクトル、 f は荷重、 $d = (d_1, \dots, d_i)^T$ は初期不整パターンベクトルである。

この構造計の単純対称分岐点に着目する。初期不整の大きさが十分に小さいという仮定のもと、初期不整を対称不整 d^+ と反対称不整 d^- に分解するという方法論により、以下に示す一般化初期不整感度則が提案されている²⁾。

$$\tilde{f}_c = \tilde{f}_c^+ + \tilde{f}_c^- = \sum_{i=1}^{p^+} C_i^+ \epsilon_i^+ - \left(\sum_{i=1}^{p^-} C_i^- \epsilon_i^- \right)^{2/3} \quad (2)$$

ここに、 $C_i^\pm$ はある定数であり、 $\epsilon_i^\pm$ は初期不整の大きさを表す変数である。また、添え字(+)は対称性を崩さない2次不整の項を、添え字(-)は対称性を崩す1次不整の項をそれぞれ表している。

3. 統計理論の適用

式(2)において、初期不整の大きさを表す変数 $\epsilon_i^\pm$ がそれぞれ平均0、分散 $\sigma_i^\pm$ の独立な正規分布に従うと仮定すると、その線形和 $\sum_{i=1}^{p^+} C_i^+ \epsilon_i^+$ は平均0、分散 $\sum_{i=1}^{p^+} (C_i^+ \sigma_i^+)^2$ の正規分布に従う。式(2)における1次不整、2次不整による座屈荷重の増分 $\tilde{f}_c^-$ 、 $\tilde{f}_c^+$ の確率密度関数 $\phi_{\tilde{f}_c^-}$ 、 $\phi_{\tilde{f}_c^+}$ はそれぞれ以下のように書ける³⁾。

$$\phi_{\tilde{f}_c^-} = \frac{3|\tilde{f}_c^-|^{1/2}}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}^-} \exp\left(-\frac{|\tilde{f}_c^-|^3}{2(\tilde{\sigma}^-)^2}\right), (-\infty < \tilde{f}_c^- < 0) \quad (3)$$

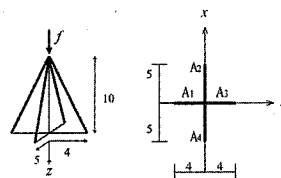
$$\phi_{\tilde{f}_c^+} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}^+} \exp\left(-\frac{\tilde{f}_c^{+2}}{2(\tilde{\sigma}^+)^2}\right), (-\infty < \tilde{f}_c^+ < \infty) \quad (4)$$

ここで、 $\tilde{\sigma}^-$ 、 $\tilde{\sigma}^+$ は、その二乗が分散を表すある定数である。

式(2)、(3)、(4)より、1次不整と2次不整による座屈荷重の増分の和 $\tilde{f}_c$ の確率密度関数は以下のように書ける。

$$\phi_{\tilde{f}_c} = \int_{-\infty}^0 \phi_{\tilde{f}_c^+}(\tilde{f}_c - \tilde{f}_c^-) \phi_{\tilde{f}_c^-}(\tilde{f}_c^-) d\tilde{f}_c^- \quad (5)$$

4. 解析例1 4パートラス



(a) 立体図 (b) 平面図
図-1 4パートラスモデル

解析例として、図1に示す4パートラスモデルについて、各部材の断面積及び頂点の座標の計7要素に初期不整を入れて解析を行った。対象となる初期不整は以下のものである。

- d_1 ... 頂点の位置を x 方向に移動させる
- d_2 ... 頂点の位置を y 方向に移動させる
- d_3 ... x 頂点の位置を z 方向に移動させる
- d_4 ... y 軸上の部材1の断面積を変化させる
- d_5 ... x 軸上の部材2の断面積を変化させる
- d_6 ... y 軸上の部材3の断面積を変化させる
- d_7 ... x 軸上の部材4の断面積を変化させる

各初期不整を単独で与えたときの初期不整感度則を求めるにあたり、高次項を考慮するために文献²⁾の方法論により、初期不整を対称・反対称不整に分類し、以下の変数変換を行った。

$$\begin{aligned} d_1^+ &= d_1, & d_2^+ &= d_3, & d_3^+ &= d_5, & d_4^+ &= d_7 \\ d_5^+ &= \frac{1}{2}(d_4 + d_6), & d_1^- &= d_2, & d_2^- &= \frac{1}{2}(d_4 - d_6) \end{aligned}$$

以上のような初期不整を入れて解析を行い、得られた係数を式(2)に代入することで、以下に示す一般化初期不整感度則を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{f}_c \simeq & -C_1^+(\varepsilon_1)^2 + C_2^+\varepsilon_3 \\ & + C_3^+\varepsilon_5 + C_4^+\varepsilon_7 - C_5^+\left(\frac{\varepsilon_4 + \varepsilon_6}{2}\right) \\ & - \left((C_1^-)^{3/2}\varepsilon_2 + (C_2^-)^{3/2}\left(\frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_6}{2}\right) \right)^{2/3} \quad (6) \end{aligned}$$

式(6)において、

$$C_1^+ = 2.8670 \times 10^{-2}, \quad C_2^+ = 5.9007 \times 10^{-2}$$

$$C_3^+ = 1.5420 \times 10^{-2}, \quad C_4^+ = 1.5420 \times 10^{-2}$$

$$C_5^+ = 3.3371 \times 10^{-1}, \quad C_1^- = 8.8598 \times 10^{-2}$$

$$C_2^- = 1.7502 \times 10^{-1}$$

である。

図1に示す4パートラスの初期不整を、平均0、標準偏差 1.0×10^{-3} の正規乱数により発生させた。図3は、有限要素解析により求めたサンプル数1000の完全系の座屈荷重からの荷重低下量のヒストグラムと、式(3)、(4)により求めた確率密度関数を比較したものである。図3(a)の、式(3)で表される1次不整の影響のみを考慮した確率密度関数では、ヒストグラムの相対度数と確率密度関数はほぼ重なっており、解析結果を十分再現できている。しかし、初期不整によって座屈荷重が増加する横軸の正の部分は再現できていないことには注意を要する。図3(b)は、式(6)で表される関数を数値積分によって求めた曲線であり、初期不整によって座屈荷重が増加する部分も再現できている。

5. 解析例2 多自由度トラスタワー

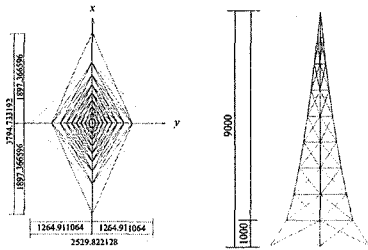


図-2 多自由度トラスタワーモデル図

大規模構造物の解析例として、図2に示す部材数148、接点数32の多自由度トラスタワーの解析を行った。断面積は1.0、弾性係数を2.0MPaとし、初期不整を入れる自由度は式(6)の妥当性を検討するに十分だと思われる37個の初期不整変数に対して解析を行った。基本的な解析手法は4パートラスと同様である。

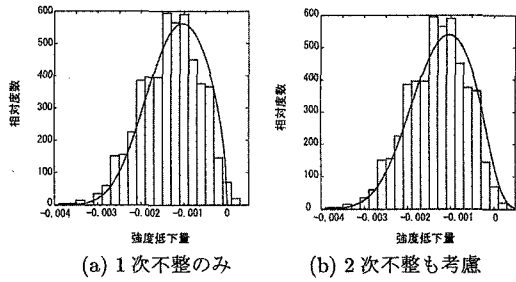


図-3 4パートラスの解析結果

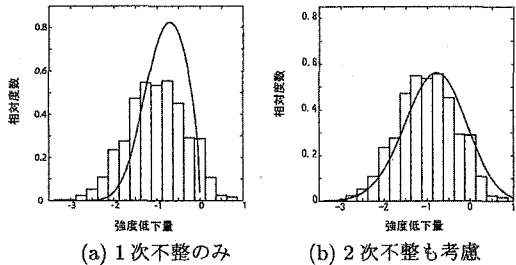


図-4 多自由度トラスタワーの解析結果

図4は、初期不整に接点位置の初期不整に平均0、標準偏差 10^{-3} の正規乱数を、部材断面積の初期不整に平均0、標準偏差 10^{-4} の正規乱数をそれぞれ発生させたときの多自由度トラスタワーの有限要素解析の結果と、式(3)と式(6)により導出した確率密度関数を比較したものである。(a)のグラフは解析結果のヒストグラムと確率密度関数のずれが大きく、1次不整だけでは解析結果を再現できていない。このことは、自由度が増える実構造物では2次不整の影響を無視できないことを示している。2次不整も考慮した(b)のグラフは、計算結果とほぼ一致している。

6. 結論

本研究では、一般化初期不整感度則に基づく座屈強度の確率評価法を提案し、その妥当性を検討することができた。特にトラスタワーの解析は、本理論が大規模構造物にも適用可能であることを示しており、有限要素コードへの取り組みが今後の課題である。

参考文献

- 1) Koiter, W.T : *On the Stability of Elastic Equilibrium*, Dissertation, Delft, Holland (English translation: NASA technical translation F 10: 833, 1967).
- 2) 池田清宏, 藤沢利光 : 左右対称構造系の一般化初期不整感度則の提案, 土木学会論文集, No.0/I-74, pp.1-8, 2006.
- 3) 池田清宏, 室田一雄 : 構造系の座屈と分岐, コロナ社, 2001.