

III-16 楕円粒子を用いた粒状要素法の開発

○八戸工業大学 学生会員 坂頂 達也
 八戸工業大学 正会員 金子 賢治
 八戸工業大学 フェロー会員 熊谷 浩二

1. はじめに

粒状要素法¹⁾は、個々の粒子のつり合いを逐次計算により求める所に特徴があり、精度の高い解析が可能である。粒状体を構成する各粒子の形状はさまざまであるが、粒状要素法においては、要素間の接触判定が単純であるため理想化された円または球要素を用いることが多い。しかしこれらの粒子は回転しやすく、実際の粒子以上に回転することが問題となる場合がある。また、初期等方応力状態においては、微視構造が必ず等方的となり間隙比もほぼ一定になる等、実際の地盤材料の特性を解析により見いだそうとする場合に不具合が生じる。本研究では、粒状要素法において初期間隙比や初期構造異方性を意図的に調整できるようにするために、楕円要素を用いた粒状要素法を開発する。なお、砂の粒子形状を正確にトレースしようとする離散解析²⁾も行われているが、本研究の意図はこれとは若干異なる。

2. 楕円粒子を用いた粒状要素法の概要

ここでは、楕円粒子を用いた粒状要素法の定式化について簡単に示す。円形粒子を用いた場合と同様の部分はここでは触れないこととし、接触の判定法を中心に説明する。

(1) 粒子形状の設定

本研究では、定式化が容易であることと3次元への拡張が容易であることを考慮して、楕円の方程式の接触は考えず、図-1で示すような半径が等しい2つの半円と長方形からなる葉のカプセルのような粒子形状を考える。同図における粒子を i とし、2つの半円 a 、 b の中心の位置ベクトルを x_a^i 、 x_b^i 、半径を r^i とする。粒子 i の重心の位置ベクトルは、

$$x_C^i = \frac{x_a^i + x_b^i}{2} \quad (1)$$

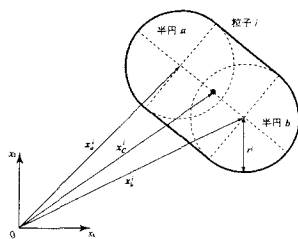


図-1 楕円粒子の設定

と表される。粒子 i の長軸、短軸の長さ l_L 、 l_S は、それぞれ、

$$l_L = \|x_a^i - x_b^i\| + 2r^i, \quad l_S = 2r^i \quad (2)$$

と表される。

(2) 接触判定

粒子 i が粒子 j と接触しているかどうかを考える。粒子 i と j とは、粒子 i の2つの半円の中心を結ぶ線分と粒子 j の2つの半円の中心を結ぶ線分との距離を d^{ij} とすると、

$$d^{ij} \leq r^i + r^j \quad (3)$$

のとき、接触していて、

$$d^{ij} > r^i + r^j \quad (4)$$

のとき、非接触となる。ここで、2つの線分の距離 d^{ij} を計算する方法について示す。ここでは、各粒子の2つの半円の中心が線分の端点となるが、2つの線分の端点を X_a^i と X_b^i 、 X_a^j と X_b^j として、 d^{ij} は以下のように求まる、

1. 2つの線分の端点 X_a^i と X_b^j 、 X_a^j と X_b^i と相手の線分との距離のうち最短のものが距離 d^{ij} となる。
2. ある点と線分との距離は、垂線が存在する場合には垂線の長さ、存在しない場合には相手の線分の2つの端点との距離の最小値となる。

点と線分との距離を求めるために、まず、図-3のように $x_{ab}^i = x_b^i - x_a^i$ とする。 x_{ab}^i の単位ベクトル n_{ab} は、

$$n_{ab} = \frac{x_b^i - x_a^i}{\|x_b^i - x_a^i\|} \quad (5)$$

と書くことができる。垂線が存在すると仮定して垂線の足の位置ベクトルを x_H とすると、 x_H は、

$$x_H = x_a^i + R \cdot n_{ab} \quad (6)$$

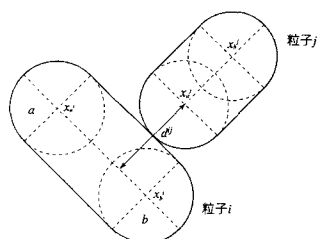


図-2 2つの楕円粒子の接触

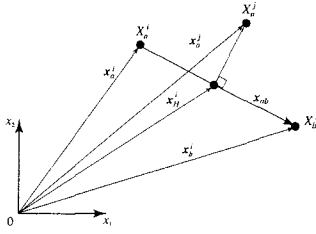


図-3 点と線分の距離

となる。ここで、 R は定数である。垂線の足から点 X_c^j を向くベクトルと n_{ab} は直交するので、

$$n_{ab} \cdot (x_a^j - x_H) = 0 \quad (7)$$

となる。式 (6) を式 (7) に代入すると、

$$R = n_{ab} \cdot (x_a^j - x_a^i) \quad (8)$$

となる。したがって、 $0 \geq R \geq \|x_b^j - x_a^i\|$ のとき垂線が存在して、

$$d^{ij} = \|x_H - x_a^j\| \quad (9)$$

となる。垂線が存在する場合が d^{ij} となる時には、半円と長方形の接触となるが、接触点の外向き単位法線ベクトル N^{ij} は、

$$N^{ij} = \frac{x_a^j - x_H}{\|x_a^j - x_H\|} \quad (10)$$

となる。また、接触点の位置ベクトルは x^{ij} は、

$$x^{ij} = x_H + r^i N^{ij} \quad (11)$$

となり、粒子重心から接触点に向くベクトル $\bar{x}^{ij}$ は、

$$\bar{x}^{ij} = x^{ij} - x_C^i \quad (12)$$

と表される。

また、垂線が存在しない場合には、

$$d^{ij} = \min\{\|x_a^j - x_a^i\|, \|x_a^j - x_b^i\|\} \quad (13)$$

$$N^{ij} = \frac{x_a^j - x_a^i}{\|x_a^j - x_a^i\|} \text{ or } N^{ij} = \frac{x_a^j - x_b^i}{\|x_a^j - x_b^i\|} \quad (14)$$

$$x^{ij} = x_a^i + r^i N^{ij} \text{ or } x^{ij} = x_b^i + r^i N^{ij} \quad (15)$$

となる。

(3) 接触点の相対変位

粒子 i と j の接触点における相対変位増分ベクトルを g^{ij} とすると、 g^{ij} と粒子 i, j の変位増分ベクトル Δu^i と Δu^j との関係は、次式により与えられる。

$$g^{ij} = R^{ij} \cdot \Delta u^i - \bar{R}^{ij} \cdot \Delta u^j \quad (16)$$

ここで、粒子 i の変位増分ベクトルは、粒子重心の変位と粒子回転を並べたベクトルである。また、 R^{ij} および $\bar{R}^{ij}$ は座標変換マトリックスであり、次式で表される。

$$R^{ij} = \begin{bmatrix} N_1 & -N_2 \\ N_2 & N_1 \\ 0 & \|\bar{x}^{ij}\| \end{bmatrix}, \quad \bar{R}^{ij} = \begin{bmatrix} N_1 & -N_2 \\ N_2 & N_1 \\ 0 & -\|\bar{x}^{ij}\| \end{bmatrix} \quad (17)$$

(4) 粒状体の静的つり合い式

粒状要素法は、粒子間構成式と制約条件を用いて粒状体全体の静的なつり合い式を任意の境界条件に基づいて解析手法である。ここでは、粒状体全体の静的なつり合い式を示す。楕円粒子を用いた場合、力のつり合いに関しては円粒子の場合と同様であるが、重心に関するモーメントが異なる。円粒子を用いた場合には接触点の接線方向成分のみがモーメントを生じさせるが、楕円の場合には法線方向も考慮する必要がある。楕円粒子の場合の重心回りのモーメントは、接触力の法線方向成分 T_n^{ij} と T_t^{ij} を用いて次のように表される。

$$M = T_n^{ij}(-\bar{x}_1^{ij} N_2 - \bar{x}_2^{ij} N_1) + T_t^{ij}(\bar{x}_1^{ij} N_1 - \bar{x}_2^{ij} N_2) \quad (18)$$

粒子 i に作用する物体力 B^i を考慮すると、粒子 i の静的つり合い式は

$$f^i = - \left(\sum_{j=1}^{j_{\max}} Q^{ij} T^{ij} + B \right) = 0 \quad (19)$$

と表される。ここに、 $\sum_{j=1}^{j_{\max}}$ は粒子 i の全接触点の総和を意味し、 f^i は粒子 i に作用する接触力とモーメントを並べた合力ベクトルである。また、 Q^{ij} は、

$$Q^{ij} = \begin{bmatrix} N_1 & -N_2 \\ N_2 & N_1 \\ -\bar{x}_1^{ij} N_2 - \bar{x}_2^{ij} N_1 & \bar{x}_1^{ij} N_1 - \bar{x}_2^{ij} N_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

この式は 1 粒子のつり合い式であるが、粒子間構成式や式 (16) などを用いて全体剛性方程式を組み立て、任意の境界条件の下で解く部分は通常の粒状要素法と同様である。

3. おわりに

ここでは、楕円粒子を用いた粒状要素法について接触判定法を中心に考え方を示した。現在、周期境界制御による解析プログラムを作成中であり、解析結果については当日発表したい。また、今後の予定としては、3次元への拡張などを考えている。

参考文献

- 1) Kishino, Y.: Computer Analysis of Dissipation Mechanism in Granular Media, *Powders and Grains*, A. A. Balkema, pp. 323-330, 1989.
- 2) Matsushima, T.: 3-D Image-based Discrete Element Modeling for Irregularly-Shaped Grains, *Proc. 2nd International PFC Symposium*, 2004 (in printing).