

Ⅲ－２

構造変化と異方性を考慮した砂の構成モデル

東北学院大学大学院工学研究科 学生会員 ○藤井 伸晃
 東北学院大学大学院工学研究科 正会員 飛田 善雄
 東北学院大学大学院工学研究科 学生会員 西村 修

1. 序論

材料挙動の構成モデル化において、異方的構造を考慮しなければ、近年の実験結果を合理的に表現することは難しい。内部構造が異方的応答に影響を与えることも実験事実として得られている。内部構造を考慮した構造テンソルを用いて異方性を表現する手法として修正応力法が提案されている¹⁾。砂の変形挙動に及ぼす内部構造の異方性や変化に着目し、粒状体力学分野で得られた既知の知見を基にし、修正応力法を用いて異方的な挙動およびひずみ軟化挙動の表現を目的としている。

2. 構造テンソルと修正応力について

構造テンソルとは、物体の内部構造の空間的・幾何学的状態を表現したテンソルである。砂の内部構造として、粒子長軸の配向性や粒子接平面の配向性、間隙の形状と配向性などを考慮することができる。本研究では簡便のため、主に初期異方性を対象として議論を行う。初期異方性を表現する構造テンソル $\mathbf{A}$ は次式で定義される。

$$A_{ij} = \frac{1}{M} \sum n_i n_j \quad - (1)$$

M は粒子の個数であり、 $n_1 = \cos \theta$ 、 $n_2 = \sin \theta$ で定義され、 θ は座標基準軸と各粒子における粒子長軸方向がなす角度としている。この式により、初期異方性の構造テンソルを決定した。

修正応力法における修正応力とは、応力を構造テンソルで線形変換した応力と定義されている。構造テンソルで変換を行っているため、変換の過程で内部構造の配置、状態を反映することが可能となる。本研究では、次式(2)で示されている Tobita and Yanagisawa²⁾によって提案されている修正応力を用いた。

$$T_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} A_{kj} + A_{ik} \sigma_{kj}) \quad - (2)$$

ここに、構造テンソルを $\mathbf{A}$ 、通常の応力を $\boldsymbol{\sigma}$ と表し、修正応力を $\mathbf{T}$ としている。

次に、修正応力が構成モデルに及ぼす影響を考える。式(2)に対して構造テンソルの主軸方向を座標系として選択したとき、次式のベクトル・マトリックス表現が得られる。

$$\{\mathbf{T}\} = [\mathbf{A}]\{\boldsymbol{\sigma}\} \quad - (3)$$

次に修正応力空間で等方体とした場合の応力・ひずみ関係を考える。そのときの一般式は、等長変換を用いたベクトル・マトリックス表現により次式で与えられるものとする（工学ひずみによりひずみベクトルを表現する Voigt 表現でも議論は変わらないが、本文では等長変換を用いた記述を行う）。

$$\{\mathbf{T}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad - (4)$$

ここで、 $[\mathbf{E}]$ は等方体の構成マトリックスである。修正応力は式(3) で与えられるものとする、形式的に次式が得られる。

$$[\mathbf{A}]\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad - (5)$$

式(5)を変形することで、式(6)が得られる。

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\sigma}\} &= [\mathbf{E}]_A \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \\ [\mathbf{E}]_A &= [\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{E}] \end{aligned} \quad - (6)$$

以上より、異方性を示す弾性マトリックスが、等方弾性と変換マトリックスの積の形で表現できることが理解できる。

3. 弾塑性モデルへの適用

修正応力法を飛田・吉田モデル³⁾に適用し、等方体での挙動と、異方性を導入した場合の挙動との比較・検討を行った。排水条件、拘束圧一定での繰返し載荷を想定した解析を行っている(図 1)。細線は等方体の $q - \gamma$ 曲線を表し、太線は異方性を考慮した $q - \gamma$ 曲線を表している。等方体と比較して、構造テンソルの最小主値方向への載荷に対しては変形しにくく、最大主値方向への載荷では変形が大きいことが再現されており、既存の実験結果の傾向を示していることが理解できる。

4. 内部構造を考慮したひずみ軟化の考察

密詰め粒状体の応力・ひずみ関係において、最大応力点（ピーク強度）に達した後、ひずみの増加につれて応力が減少するひずみ軟化現象が観察される。ひずみ軟化現象が生じるとき、粒状体内部ではせん断帯と呼ばれる変形の局所化が観察される。せん断帯内部での構造変化に関する実験結果⁴⁾から、粒子長軸の卓越方向がせん断帯内部の狭い領域において、せん断帯に中央部に向かって大きく回転していることが観察されている。

このようなせん断帯内部での構造の回転により、粒子による“柱”構造の回転を生じると仮定する。このメカニズムを考慮し、せん断帯が生じることにより、構造テンソルの主軸に回転を与えることでひずみ軟化の表現を試みている。つまり、せん断帯発生後の構造テンソル $\bar{\mathbf{A}}$ を次式で定義する。

$$[\bar{\mathbf{A}}] = [\mathbf{R}][\mathbf{A}][\mathbf{R}]^T \quad - (7)$$

ここで、 $[\mathbf{R}]$ は座標変換マトリクスである。また、本研究ではせん断帯の発生条件を分岐問題として捉え、その詳細な数学的議論は取り扱わない。本論分では、以下の条件が満たされた場合にせん断帯が発生し得るものとして扱っている。

$$A \tan^4 \psi + B \tan^2 \psi + C = 0$$

$$\psi \approx \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad - (8)$$

ここで、 ϕ は内部摩擦角であり、 A 、 B 、 C は構成マトリクスによって定められる係数である⁵⁾。

以上の議論を基に修正応力法を飛田・吉田モデルに適用し、解析を行った(図2)。排水条件、拘束圧一定での単調載荷をでの解析を行っている。細線は等方体の $q - \gamma$ 曲線を表し、太線は内部構造の回転を含む異方性を考慮した $q - \gamma$ 曲線を表している。太線の初期異方性の程度は $A_1=0.8, A_2=1.2$ としている。せん断帯の発生条件が満たされた後に、緩やかにひずみ軟化挙動を描いていることが理解できる。

5. 結論

内部構造の影響を考慮した構造テンソルを用いて修正応力法によって異方性の影響を取り入れた。また、せん断帯内部での粒子回転を考慮し、ひずみ軟化挙動の考察を行った。以上より以下の結論が得られた。

- 1) 構造テンソルおよび修正応力法を用いることにより、異方性を含む変形挙動を表現可能である
- 2) せん断帯内部での粒子回転を考慮し、構造テンソルに回転を与えることにより、ひずみ軟化挙動の表現が可能であることが示唆された

異方性挙動を表現するために、数学的に簡潔で多くの挙動を包括する修正応力法について、その物性的背景と有用性を議論したが、今後残された課題は以下の2点である。

- 1) 構造テンソルのような内部変数の定義とその発展則の構築
- 2) 内部変数の変化によるひずみの変化の表現

修正応力法が異方的挙動の表現に真に有効であるためには、この2つの課題を克服する努力が必要となる。

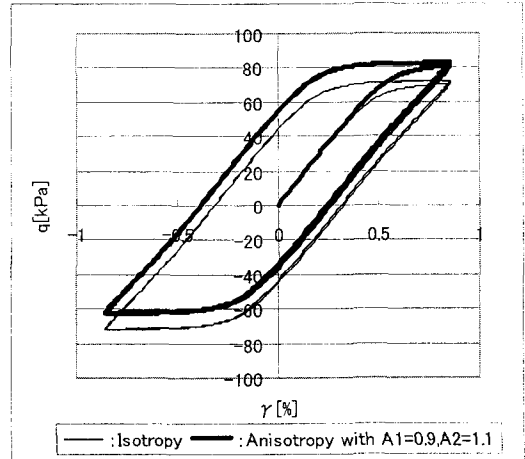


図1 修正応力法を適用した $q - \gamma$ 曲線

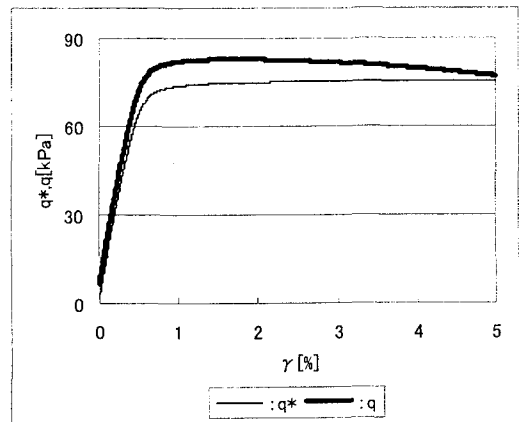


図2 せん断帯による内部構造変化を考慮した $q - \gamma$

参考文献)

- 1) 飛田善雄・山口晶・藤井伸晃・金原瑞男: 工学材料の異方的挙動の簡易な表現方法, 応用力学論文集, pp.407-418, 2003
- 2) Tobita, Y. and Yanagisawa, E: Modified stress tensors for anisotropic behavior of granular materials, *Soils and Foundations*, 32, 1, pp.85-99, 1992
- 3) Tobita, Y. and bounding surface model for cyclic behavior of sand: Yoshida, N. (1994): An isotropic Limitation and modification, Proc. of Int. Conf. on Prefailure behavior of sands, Sapporo, pp.457-462.
- 4) 小田匡寛: 土の微視的構造を探索するための実験的研究 (その3), 講座: 土の構造とメカニクス—ミクロからマクロへ, 土と基礎, 50, 4, pp.42-47, 2002
- 5) 飛田善雄: 地盤材料のせん断帯解析の必要性と現状, 報文-2082, 土と基礎, 38, 12, pp.17-22, 1990