

III — 1

土の脆性挙動のモデル化に関する研究：モデル化の考察

東北学院大学大学院 学生会員 ○荻場悠佑
 東北学院大学大学院 正会員 飛田善雄
 東北学院大学大学院 学生会員 山根久和

1. はじめに

土の脆性挙動に関する研究は、設計で引張り強度を無視するためにほとんどされてこなかった。しかし、土の脆性挙動は、地盤の破壊問題や実務において重要視されている。土の脆性挙動を把握し、適切な構成モデルを構築し、適切に数値解析に適用できれば、土構造物の静的安定・地震時安定に対して新たな知見を与える事も可能といえる。そこで、本研究では、次の点に考慮した、土の脆性挙動を表現できる構成モデルの開発を主要な目的とする。

- 1) 数値解析に特別な考慮をすることなく適用可能
- 2) 脆性・延性挙動を一括して表現可能

上記のような特徴をもつ構成モデルを内部変数理論の範疇で構築することを目標とする。

2. 脆性挙動を表現するモデル

まず、土と類似した特性をもつ材料として、コンクリート力学分野における脆性挙動のモデル化を参考とした。具体的には、Rots[1]と Ortiz[2]のモデルについて詳細な検討を行った。両者ともクラックなどのある材料を連続体として取り扱うモデルである。Rots のモデルは実務計算に適したモデルであり、Ortiz のモデルは熱力学的議論に基礎を置く、脆性材料のモデル化として最も有力なモデルである。両者のモデルについて簡単な導入を次節より行う。

3. Rots のモデル

このモデルは smeared crack 概念に基礎を置くモデルである。数学的構造は以下ようになる。

◇ひずみ速度の分割

ひずみ速度を弾性成分とクラック成分に分割する。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^c \quad (1)$$

◇クラックの構成モデル

クラックに付随する局所座標系でのクラックひずみ速度 $\dot{\epsilon}^c$ とクラック面に作用する応力速度 $\dot{\mathbf{t}}$ の関係は次のように定義される。 $\dot{\epsilon}^c$ を内部変数として利用していることになる。

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{D}^c \dot{\epsilon}^c \quad (2)$$

◇局所座標系と全体座標系の関係

二つの座標系間はそれぞれの方向余弦を用いて $\mathbf{N}$ として関係付けられる。

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\epsilon}^c = \mathbf{N} \dot{\epsilon}^e \quad (3)$$

以上の式(1)～(3)を弾性関係式に代入して、増分形式の弾塑性構成モデルと類似した構成モデルが得られることになる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = [\mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^e}{\mathbf{D}^e + \mathbf{N} \mathbf{D}^c \mathbf{N}^T}] \dot{\epsilon} \quad (4)$$

Rots のモデルは 1 方向固定モデルと、多方向固定モデル、回転モデルに分類できる。本論文では詳述しない。

4. Ortiz のモデル

損傷力学に基礎を置く脆性挙動を表現するモデルの中でも、土への適用を考えた場合に最も可能性の高いモデルと考えられる。Ortiz モデルの特徴は次のようになる。

- ・引張り時にはモード I、圧縮時にはモード II の脆性挙動が表現できる。
- ・応力の分割を行い、引張り場と圧縮場それぞれに定式化がなされる。
- ・定式化が熱力学に基礎を置いており、一般性が高い。
- ・損傷力学に基礎を置く定式化と考えられるが、応力ひずみ関係のピーク後のひずみ軟化挙動が表現できる。

これらの特徴は、土の脆性挙動を表現するためには重要なものである。モデルの構造を簡単に説明すると次のようになる。

◇Gibbs の自由エネルギーの仮定

脆性挙動の表現のために、Gibbs の自由エネルギーを考える。

$$G = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} - A_c \quad (5)$$

◇Ortiz モデルにおける内部変数

ひずみは、Gibbs の自由エネルギーを応力に関して偏微分することによって得られる。さらに時間に関して偏微分を行なうと次のようなひずみ速度が得られる。

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\sigma} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^c \quad (6)$$

$\dot{\epsilon}^e$ は瞬間的な弾性ひずみ速度であり、 $\dot{\epsilon}^c$ はクラックひずみである。Ortiz モデルにおいては、弾性コン

プライアンステンソルそれ自身を、材料の損傷程度を表現する内部変数として捉えている。

◇応力の分割

引張りと圧縮を個別に表現するために、応力を分割する。応力が正の部分(引張り部分)と応力が負の部分(圧縮)をそれぞれ次のように定義する。

$$\sigma^+ = \sum_a \langle \sigma^{(a)} \rangle \mathbf{d}^{(a)} \otimes \mathbf{d}^{(a)}, \quad \sigma^- = \sigma - \sigma^+ \quad (7)$$

$\sigma^{(a)}, \mathbf{d}^{(a)}$ は応力 σ の主値と主方向である。

◇損傷発展則と損傷基準

発展則モード I, モード II におけるコンプライアンスの増加の発展則を次のように定義する。

$$\dot{\tilde{C}}_I = \dot{\mu} \mathbf{R}_I(\sigma) \quad \dot{\tilde{C}}_II = \dot{\mu} \mathbf{R}_{II}(\sigma) \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{R}_I$ および $\mathbf{R}_{II}$ は、損傷の方向を決定する 4 階のテンソルである。また、 μ はスカラー変数であり、損傷の累積を表現するパラメータである。 $\dot{\mu} > 0$ の状況で損傷が進行していることを意味する。

◇損傷関数

どのような条件のもとで、さらなる損傷が発生するのかについての規準として、次式の損傷関数を定義する。

$$\Phi(\sigma, \mu) = F(\sigma) - \frac{1}{2} t^2(\mu) = 0 \quad (9)$$

$F(\sigma)$ は、応力と $\mathbf{R}_I$ および $\mathbf{R}_{II}$ の関数である。また、 t は一軸引張り時の損傷が開始されるときに応力である。式(9)の包絡線を 2 軸応力状態で描くと図-1 のようになる。

◇関連流れ則

クラックひずみ速度を次のように定義する。

$$\dot{\epsilon}^c = \dot{\mu} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) \quad (10)$$

◇応力速度・ひずみ速度関係

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \mathbf{D}' : \dot{\epsilon} \\ \mathbf{D}' \equiv \left(\mathbf{D} - \frac{(\mathbf{D} : \mathbf{S}') \otimes (\mathbf{D} : \mathbf{S}')}{\mathbf{S}' : \mathbf{D} : \mathbf{S} + t(\partial t / \partial \mu)} \right) \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{D}$ はコンプライアンスの逆である。また、 $\mathbf{S}'$ は $\mathbf{S}' = \partial F / \partial \sigma$ で定義される。

5. 二つのモデルの比較

Rots のモデルと Ortiz のモデルを内部変数理論の観点から考察する。内部変数としては、Rots のモデルは、クラックひずみを用い、Ortiz のモデルでは、4 階のコンプライアンステンソルを用いている。また、軟化関係は Rots のモデルでは、内部変数と応力の関係を直接的にひずみ軟化関係に結び付けている。一方、

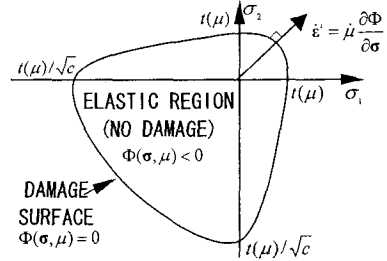


図1 損傷関数の表現(2軸応力状態)

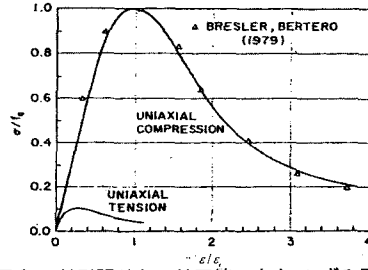


図2 一軸引張りと一軸圧縮の応力-ひずみ関係

Ortiz のモデルは内部変数に対して、その共役な表現を求め、その中に含まれるスカラー変数に対して、曲線関係を与えている。定式化の過程や表現方法は異なるが、内部変数理論の観点からは、同じ枠内にあるモデルと考えることができる。

6. 考察

Rots と Ortiz のモデルに着目し、簡単な導入と比較を行なった。我々が目標とするモデルは脆性から延性挙動までを一括して表現できる構成モデルである。Rots のモデルは、圧縮側は弾性としているため、圧縮側の記述について新たに何らかの考慮が必要である。対して、Ortiz のモデルは引張り側ではモード I のクラックの開口、圧縮側ではモード II のクラック面でのすべりとして脆性挙動を表現することができる。図-2 に Ortiz のモデルで計算[3]した、一軸圧縮と一軸引張りの計算結果を記す。また、脆性・延性の遷移領域も記述できるモデルである。よって、我々が、対象とするモデルは Ortiz のモデルが最も有望と考えられる。

7. おわりに

本研究では、土の脆性挙動を表現出来る構成モデルの構築を目的として、まず、過去のモデルを参考にし、モデル化に関する考察を行った。Ortiz のモデルが最も有望な対象になると思われるが、定式化において様々な仮定をしており、その点において今後検討する必要がある。

＜参考文献＞[1]Rots J.G.: Computational modeling of concrete fracture, Dissertation, Delft Univ. of Techn., pp.1-41, 1988. [2]Ortiz M and E.P. Popov: A physical model for the inelasticity of concrete, Proc. Roy. Soc. Lond. A383, pp.101-125, 1982b. [3]Ortiz M: A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete, Mechanics of Materials 4, pp.67-93, 1985.