

II-34 侵食性河床におけるリップル状河床形態 発生線の安定解析

東北大学大学院 学生員 ○島田 典和
東北大学大学院 正会員 泉 典洋

1. はじめに

非粘性土砂で構成された河川の河床形態については古くから数多くの研究が行われている。しかし、粘性土砂で構成された河道についてはこれまでほとんど研究されていないのが現状である。

粘性土砂で構成された河道では、侵食が卓越し河床面における堆積の効果を無視することができる。このとき河床高の時間変化が次式で表される¹⁾

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = -\alpha(\bar{\tau}_b - \bar{\tau}_{th})^3 \quad (1)$$

ここで、 λ_p は空隙率、 $\bar{\tau}_b$ は底面せん断力であり、 $\bar{\tau}_{th}$ は限界せん断力を表す。ここでは、このような河床を侵食性河床と呼ぶこととする。

既存の研究から、粘性河床では侵食が進行する過程で微小な波形状が形成されるという結果²⁾が得られている。本研究では、この現れた波形状を非粘性河床に現れる河床リップルと力学的に類似のものと考え、その発生機構を二次元レイノルズ方程式を用いた線形安定解析を行うことによって理論的に説明することを試みた。

2. モデル

図-1に示すような水面の存在を考慮しない河床近傍の二次元流れを考える。

この侵食性河床において摂動発生前の基準状態として平坦床を考え、河床上に形成されるリップルを想定して、次式に示す微小摂動を河床に与える。

$$\eta(x) = Ae^{i(kx - \omega t)} + c.c. = Ae^{\Omega t} e^{i(kx - \omega' t)} + c.c. \quad (2)$$

ここで A は摂動の微小振幅、 k は摂動の波数、 ω は複素角速度、 $c.c.$ は複素共役である。 ω の虚部が発達速度 Ω であり、この値が正であれば微小摂動が発達することを示す。

3. 支配方程式

(1) 無次元化

次のような無次元化を導入する。

$$\begin{cases} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) = \frac{l_m}{U^*} (x, y, \eta), (\bar{u}, \bar{v}) = U^* (u, v) \\ (\bar{\tau}_{ij}, \bar{p}) = \rho U^{*2} (\tau_{ij}, p) \\ \bar{t} = (1 - \lambda_p) \frac{l_m}{U^*} [\alpha (\rho U^{*2})^3]^{-1} t \end{cases} \quad (3)$$

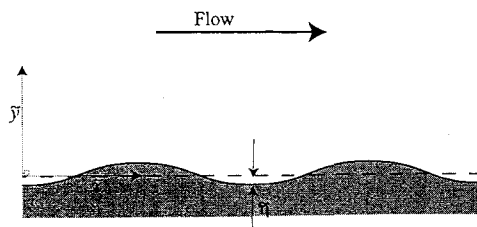


図-1 流れのモデル及び座標系

ν_M は分子粘性係数、 U^* は平坦床での摩擦速度である。

(2) 定式化

図-1に示す流れの二次元レイノルズ方程式及び河床高の時間変化式は次式のように表される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (4)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\left(\tau_b - \frac{\tau_{th}}{\tau_0}\right)^3 \quad (7)$$

ここで τ_0 は摂動を与える前の等流状態での無次元底面せん断力、 τ_b は波面に沿う無次元底面せん断力である。また、 τ_{xx} 、 τ_{xy} 、 τ_{yy} は粘性応力及びレイノルズ応力からなる無次元せん断応力であり次式で表される。

$$\tau_{xx} = (\nu_T + 1) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = (\nu_T + 1) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (9)$$

$$\tau_{yy} = (\nu_T + 1) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (10)$$

ここで ν_T は無次元渦動粘性係数であり、混合距離 l_m を用いて次式で表される。

$$\nu_T = l_m^2 |\partial u / \partial y| \quad (11)$$

河床近傍では、粘性の影響が支配的に働く。そこで混合距離 l_m を次式のように表す³⁾。

$$l_m = \kappa(y - \eta + \Delta y) \{1 - \exp[-(y - \eta + \Delta y)\tau_b^{1/2}/a]\} \quad (12)$$

ここで κ はカルマン定数 0.41, a は減衰定数である。また, Δy は相当粗度 k_s の関数であり次式で表される。

$$\Delta y = 0.9 \{ k_s^{\frac{1}{2}} - k_s \exp[-\frac{1}{6} k_s] \} \quad (13)$$

(3) 境界条件

河床面での運動学的境界条件, および河床から十分離れた遠点において摂動の影響が消滅する条件としてそれぞれ次式が得られる。

$$\begin{cases} u = 0, & v = 0 & (y = \eta) \\ u = u_0, & v = 0 & (\text{large } y) \end{cases} \quad (14)$$

4. 線形安定解析

基準状態である河床に対して, 式 (2) に示した振幅 A の微小摂動を与える。各変数はそれぞれ次のように摂動展開される。

$$\begin{cases} u(x, y) = u_0(y) + Au_1(y)e^{i(kx-\omega t)} + \text{c.c.} \\ v(x, y) = Av_1(y)e^{i(kx-\omega t)} + \text{c.c.} \\ p(x, y) = p_0(y) + Ap_1(y)e^{i(kx-\omega t)} + \text{c.c.} \\ \eta(x) = A\eta_1e^{i(kx-\omega t)} + \text{c.c.} \end{cases} \quad (15)$$

このとき u, v に関して流関数を導入する。流関数 ψ の摂動展開は次式のように表すことができる。

$$\psi = \int_0^y u_0(y) dy + A\phi_1(y)e^{i(kx-\omega t)} \quad (16)$$

式 (4)-(7) の支配方程式及び境界条件 (14) に式 (15) を代入し $O(A)$ について整理することにより, $\phi_1(y)$ に関する摂動方程式を導く。また, $O(1)$ より流速の基本解 u_0 が得られる。

$$u_0(y) = \int_0^y \frac{2}{1 + (1 + 4l_m^2)^{\frac{1}{2}}} dy \quad (17)$$

次に ϕ_1 に Chebyshev 多項式展開を導入することにより, ω を固有値とする一般化固有値問題を導く。この固有値問題について Mathematica を用いて ω を求めた。得られた ω の虚部 ω_i が発達速度 Ω となる。

5. 結果及び考察

図-2 が発達速度 Ω の等高線図である。太い実線が中立曲線, 実線が正, 点線が負のコンタを表す。縦軸が相当粗度 k_s , 横軸が無次元波数 k である。図より, k_s の値が 12.5~13 以下であり, かつ k が 0.024~0.026 以下の値をとる領域で, Ω の値が正となる。これはこの範囲内において平坦床が微小摂動に対して不安定となることを意味する。また, 平坦床では k_s は粒径

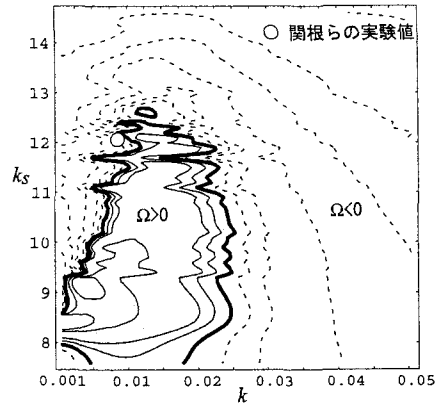


図-2 無次元波数 k 及び相当粗度 k_s における発達速度 Ω

d の 2~3 倍と考えられる。 $k_s = 2.5d$ とすると, リップル状河床形態は粒子レイノルズ数 $Re (= dU^*/\bar{v}_M)$ が 4.3~6.4 以下で発達すると考えられる。

図-2 において k による Ω の値に着目すると, ある k_s の範囲で, Ω の値を最大にする卓越波数 k_c が存在することがわかる。この値は 0.004~0.015 程度の値である。卓越波長は $\bar{\lambda} = 2\pi\bar{v}_M/(k_cU^*)$ と表せることから, $\bar{v}_M = 0.01(\text{cm}^2/\text{s})$ とすると, 発達する卓越波長は摩擦速度 (cm/s) の逆数の 4.2~16 倍程度となる。

次に関根らの実験結果との比較を行った。実験では摩擦速度 7.59 cm/s において波長が 1.5 cm , 波高数 mm 程度の波形が観測されたと報告されている²⁾。実験結果によると k_s の値は 12 程度の値を示す。図-2 にその値を示す。若干のずれはあるもののよい一致を示したと考えられる。

6. まとめ

- リップル状河床形態が発達するのは粒子レイノルズ数が 4.3~6.4 以下となる。
- リップル状河床形態が発達する卓越波長は摩擦速度の逆数の 4.2~16 倍程度となる。
- 本解析で求めた卓越波長は実験結果とよい一致を示すことがわかった。

参考文献

- 1) 泉典洋：水路群発生線形安定論—斜面下流端からの発生理論, 土木学会論文集, No. 614/II-46, 65-75, 1999.2
- 2) 関根正人, 熊谷利彦, 尾藤文人：粘着性土の浸食機構に関する基礎的研究, 水工学論文集, vol. 43, 659-664, 2003.2
- 3) B. Mutlu Sumer and Mehmet Bakioglu: On the formation of ripples on an erodible bed, J. Fluid Mech. 1984. vol. 144, pp.177-190