

I-34

一般化高次梁理論に基づく有限要素法による

2次元梁の曲げ・伸縮問題の解析

福島 高専 正 員 根 岸 嘉 和

1. 緒 言

本報告は、著者らが先に提案した梁の解析に関する一般化高次理論¹⁾の考え方を、有限要素法に用いた数値解析法の構築によって、梁の曲げならびに伸縮問題の有限要素解析の精密化と一般化高次理論の有用性の拡大を目指すものである。ここでは2次元梁の変位成分を高さ方向座標のべき級数で仮定する手法に基づく有限要素法を構築し、曲げ問題および伸縮問題の解析を通じて高次理論要素の精度を検証する。

2. 一般化高次理論

図-1に示す座標系で、梁(均質等方性)の境界面に分布荷重を載荷した問題の一般化高次理論の概要を示す。

梁の変位成分 $u_i; i=x, z$ を次式のように高さ方向座標 z のべき級数 (N : 理論の次数) で展開する。

$$u_i = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n u_{i(n)}(x) \quad (1)$$

変分原理に従って、次式の変位係数の支配方程式が境界条件式とともに導かれる。

$$\sigma_{ix,x}^{(n)} - n \sigma_{iz}^{(n-1)} + F_i^{(n)} = 0 \quad (2)$$

上式の各項は次の高次断面力と荷重項である。

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z^n dz, \quad F_i^{(n)} = \left[\sigma_{zi} z^n \right]_{z=-h/2}^{z=h/2} \quad (3)$$

3. 精密化有限要素法の構築

梁要素 (2 節点) の変位成分 $u_i; i=x, z$ を、高さ方向には図-2のように z のべき乗 z^n で展開仮定し、長さ方向には図-3 の変位関数 $N^{(m)}(\xi); \xi = x/(l/2); m=1 \sim 4$ を採用し、節点変位・無節点変位の係数 $u_{i(n)}^{[m]}$ との積で仮定する。これらの仮定により変位成分は次式で表される。

$$u_i = \sum_n z^n u_{i(n)}(x) = \sum_n z^n \sum_m u_{i(n)}^{[m]} N^{[m]}(\xi) \quad (4)$$

これをマトリックス表示すると次式のようになる。

$$\{u\} = [N] \{\delta\} \quad (5)$$

$\{\delta\}$ は梁要素の2節点での節点変位と各要素内での無節点変位 $u_{i(n)}^{[m]}$ よりなる次式の変位ベクトルである。

$$\{\delta\} = \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_p \{u_{z(2n-2)}^{[p]}; u_{x(2n-1)}^{[p]}\}; \sum_m \{u_{z(2n-2)}^{[m]}; u_{x(2n-1)}^{[m]}\} \right\} \quad (6)$$

幾何学的関係式より、ひずみベクトル $\{\epsilon\}$ は、

$$\{\epsilon\} = [N'] \{\delta\} \quad (7)$$

構成関係式より、剛性係数マトリックス $[D]$ を用いて、応力ベクトル $\{\sigma\}$ は、

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D] [N'] \{\delta\} \quad (8)$$

他方、変位ベクトルの成分 $u_{i(n)}^{[m]}$ に対応した節点力ベクトル $\{f\}$ の成分 $f_{i(n)}^{[m]}$ は次式で求められる。

$$f_{i(n)}^{[m]} = \int_{-l/2}^{l/2} p(x) u_{z(n)}^{[m]}(x) \Big|_{z=-h/2}^{z=h/2} dx \quad (9)$$

これらを用い、次の仮想仕事の原理より、

$$\{f\}^T d\{\delta\} = \int [\sigma] d[\epsilon] dV = [k] \{\delta\} d\{\delta\} \quad (10)$$

次式の剛性方程式が導かれる。

$$\{f\} = [k] \{\delta\} \quad (11)$$

なお要素剛性マトリックス $[k]$ は次式で計算される。

$$[k] = \int [[N']^T [D] [N']] dV \quad (12)$$

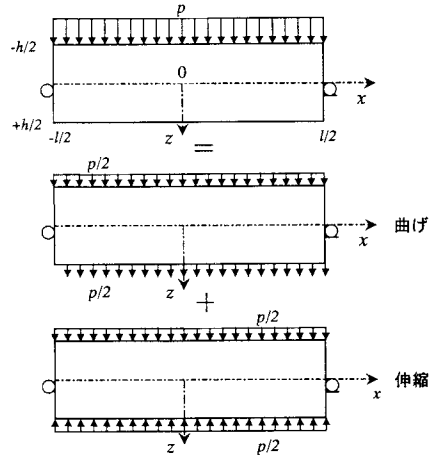
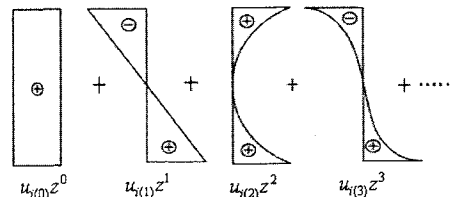


図-1 座標系と梁の曲げ挙動・伸縮挙動



曲げ $uz: n=0, 2, 4, \sim$ $ux: n=1, 3, 5, \sim$

伸縮 $uz: n=1, 3, 5, \sim$ $ux: n=0, 2, 4, \sim$

図-2 変位係数 $u_{i(n)}$ の高さ方向分布

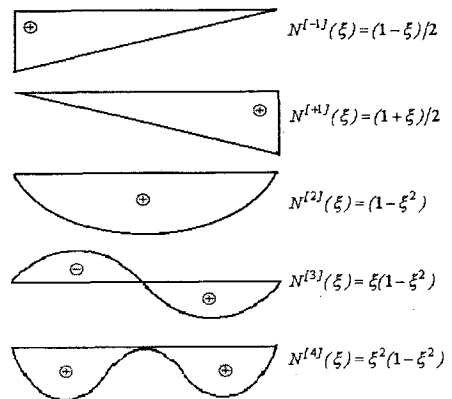


図-3 変位関数 $N^{[m]}(\xi); \xi = x/(l/2)$ の軸方向分布

4. 解析例と精度特性

(1) 曲げ問題：等分布荷重を受ける単純梁

図-1の単純梁 ($h/l=0.5$, $\nu=0.3$) に等分布荷重 p が満載された場合を、本手法の高さ方向に n 次理論に基づき ($n=1\sim 3$)、長さ方向に m 次分布の変位関数を用いた要素 (n th- m と表記) の各有限要素法で解く。同時に Bernoulli-Euler 古典理論に基づく有限要素法 (Classical) による解析を行い、2次元弾性論の弾性解 (Elasticity) ²⁾ との比較を通じて精度特性の検証を行う。

図-4 に梁中央位置でのたわみ (中立軸の鉛直変位): $w_0=[u_z]_{z=0}$ の要素等分割数の増大に伴う収束状況を示す。1 次理論要素 (1st), 2 次理論要素 (2nd), 3 次理論要素 (3rd) の各解とも要素数の増大に伴って各理論次数の解に収束している。なお 2 次理論要素 (2nd) で軸方向の変位分布を表す変位関数 $N^{[m]}$ の高次化を図った各要素 ($m=1\sim 4$) の結果より、軸方向分布の高次化に伴いより少ない分割数で収束することが確認できる。

図-5 に梁中央位置での鉛直変位 u_z の高さ方向分布の収束解 (16 要素) を示す。古典解 (Classical) は一定値、1st は伸縮挙動を含む直線分布で、2nd, 3rd が曲線分布を与え、柔な構造に評価している分、順次値が増大している。2次元弾性解 (Elasticity) が限定的な応力関数に基づく解であることから、2nd に近くより小さい値となっている。これらの分布形は互いに類似している。

(2) 伸縮問題：先端面に放物線分布荷重を受ける片持ち梁

図-6 に示す片持ち梁 ($h/l=0.5$, $\nu=0.3$) に放物線分布荷重 $p=p_0(1-\xi^2)$; $\xi=z/(h/2)$ が載荷された場合を上記各手法で解く。

図-7 に解析結果の 1 例として、2 要素分割の場合の梁の載荷端面上での軸方向垂直応力 σ_{xx} の高さ方向分布を示す。

1st は古典解 (Classical) とともに平均応力度に等しい一定値しか与えないが、2nd では要素数の増大との関連をもちつつ、長さ方向変位関数の高次化に伴い 2 次理論要素の解に収束していく。2nd-4 (高さ方向 3 次分布: z^3 —長さ方向 4 次分布: x^4 まで考慮) は、厳密な作用荷重を表している弾性解 (Elasticity) にほぼ一致している。

5. 結 言

以上の結果、一般化高次理論に基づく FEM 解析は、理論次数の高次化にともなって精密な解を与えており、2 次理論要素による解析で 3 次理論要素解とわずかな差の解が得られ、これらは厳密な挙動の近似解として高精度の解であることが検証された。

本解析例では、2 次理論要素で軸方向 2 次分布まで考慮したもの (2nd-2) の計算効率が高い。

本研究の結果、厳密解を目標値とする精密化有限要素法が構築され、一般化高次理論の有用化が図られた。

6. 参考文献

- 1) 平島健一・根岸嘉和：土木学会論文集, 350 号 / I-2, pp.351-354, 1984.
- 2) Timoshenko S.P., J.N.Goodier: Theory of Elasticity, McGRAW-HILL KOGAKUSHA, 1970.

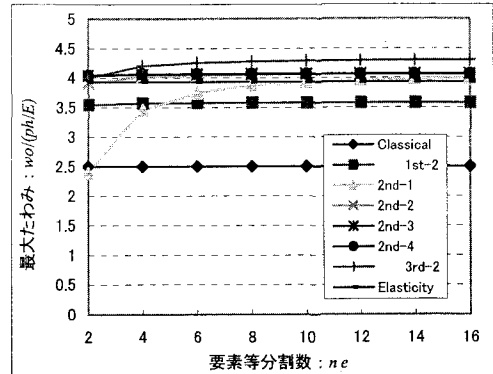


図-4 要素分割数による最大たわみ w_0 の収束状況

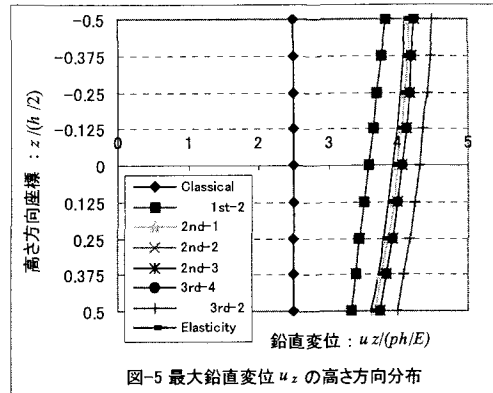


図-5 最大鉛直変位 u_z の高さ方向分布

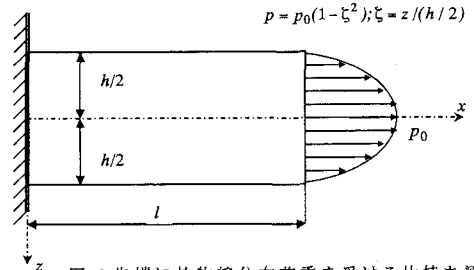


図-6 先端に放物線分布荷重を受ける片持ち梁

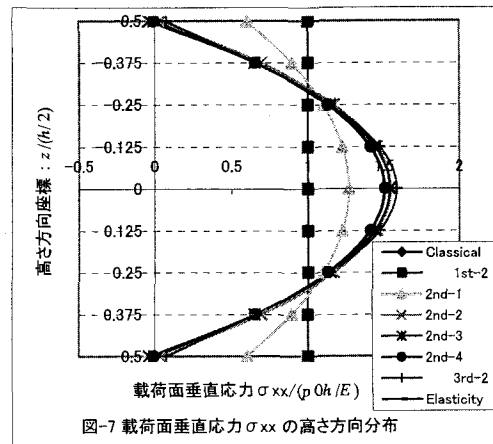


図-7 載荷面垂直応力 σ_{xx} の高さ方向分布