

I-33

一般化高次平板理論に基づく有限要素解析における3次修正項の効果

福島高専専攻科 学生員 ○ 村 山 暢
福島高専 正員 根 岸 嘉 和

1. 緒 言

本報告は、著者の一人らが先に提案した平板曲げに関する一般化高次理論¹⁾の考え方を、有限要素法に用いた数値解析法の構築によって、平板曲げの有限要素解析の精密化と一般化高次理論の有用性の拡大を目指すものである。ここでは著者の一人による前報²⁾の結果を踏まえて、さらなる高次化を図った3次理論要素の修正効果を中心に報告する。

2. 一般化高次理論

図-1に示す座標系のもとで、平板（均質等方性）の上下表面に逆対称荷重 $p/2$ が載荷された曲げ挙動に限定し、本有限要素法の基盤となる一般化高次理論の概要を示す。

平板の変位成分 $u_i : i = x, y, z$ を次式のように厚さ方向座標 z のべき級数 (N :理論次数) で展開する。

$$u_z = \sum_{n=1}^N z^{2n-2} u_{z(2n-2)}(x, y) \quad (1)$$

$$u_a = \sum_{n=1}^N z^{2n-1} u_{a(2n-1)}(x, y) : a = x, y$$

変分原理に従って、次式の変位係数の支配方程式が境界条件式とともに導かれる。

$$\sigma_{\alpha\beta, \alpha}^{(n)} - n \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} + F_j^{(n)} = 0 \quad (2)$$

上式の各項は次の高次断面力と荷重項である。

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z^n dz, \quad F_i^{(n)} = \left[\sigma_{zj} z^n \right]_{z=-h/2}^{h/2} \quad (3)$$

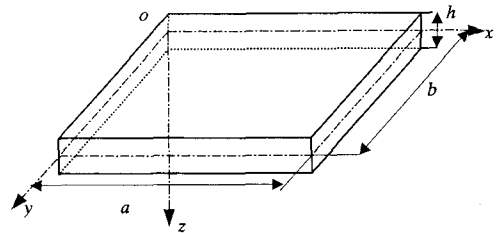


図-1 平板の形状と座標系

3. 精密化有限要素法の構築

平板要素の変位成分 $u_i : i = x, y, z$ を、図-2 ならびに次式のように厚さ方向座標 z のべき乗 z^n と $12N$ 個の未知係数 $\alpha_{i(n)}^{(l,m)}$ を含む変位関数の積で仮定する。

$$u_i = \sum_n z^n u_{i(n)}(x, y) = \sum_n z^n \sum_l \sum_m \alpha_{i(n)}^{(l,m)} x^l y^m \quad (4)$$

面内方向の変位関数 $u_{i(n)}(x, y)$ には、次式に示すように面外せん断ひずみの面内方向変化率がゼロ ($\varepsilon_{\alpha\beta, \alpha} = 0$) となる Greimann-Lynn³⁾ の変位関数を用いて薄板の場合の精度低下を回避する手法を用いた。

$$u_{z(n)} = (n+1) \{ \alpha_{z(n)}^{(0,0)} + \alpha_{z(n)}^{(1,0)} x + \alpha_{z(n)}^{(0,1)} y + \alpha_{z(n)}^{(1,1)} xy + \alpha_{z(n)}^{(2,0)} x^2/2 + \alpha_{z(n)}^{(0,2)} y^2/2 + \alpha_{z(n)}^{(2,1)} x^2 y/2 + \alpha_{z(n)}^{(1,2)} xy^2/2 \}; n = 0, 2, 4, \dots \quad (5)$$

$$u_{\beta(n)} = \alpha_{\beta(n)}^{(0,0)} + \alpha_{\beta(n)}^{(1,0)} x + \alpha_{\beta(n)}^{(0,1)} y + \alpha_{\beta(n)}^{(1,1)} xy; \beta = x, y$$

$$\alpha_{z(n)}^{(2,0)} = \alpha_{x(n+1)}^{(1,0)}, \alpha_{z(n)}^{(2,1)} = \alpha_{x(n+1)}^{(0,1)}, \alpha_{z(n)}^{(1,2)} = \alpha_{y(n+1)}^{(1,0)}, \alpha_{z(n)}^{(0,2)} = \alpha_{y(n+1)}^{(0,1)}$$

これをマトリックス表示すると次式ようになる。

$$\{u\} = [N] \{\alpha\} \quad (6)$$

これより、長方形要素の4節点での合計 $12N$ 個の成分よりなる節点変位ベクトル $\{\delta\}$:

$$\{\delta\} = \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^4 \{u_{z(2n-2)}^{[p]}; u_{x(2n-1)}^{[p]}; u_{y(2n-1)}^{[p]}\} \quad (7)$$

が次式で表せる。

$$\{\delta\} = [G] \{\alpha\} \quad (8)$$

上式を $\{\alpha\}$ について解き、式(6)に代入すると、

$$\{u\} = [N] [G^{-1}] \{\delta\} \quad (9)$$

幾何学的関係式より、ひずみベクトル $\{\epsilon\}$ は、

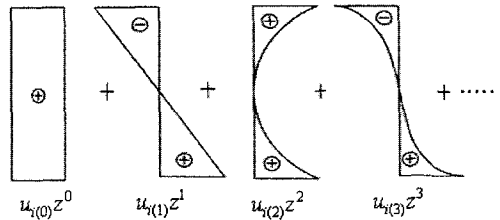


図-2 変位係数 $u_i(n)$ の面外方向分布

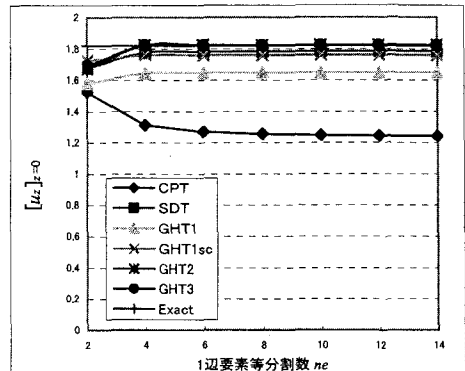


図-3 要素等分割数とたわみ $u_z(z=0)$ の収束

$$\{\epsilon\}=[N']\{\alpha\}=[N'] [G^{-1}]\{\delta\} \quad (10)$$

構成関係より、剛性係数マトリックス $[D]$ を用いて、応力ベクトル $\{\sigma\}$ は、

$$\{\sigma\}=[D]\{\epsilon\}=[D][N']\{\alpha\}=[D][N'] [G^{-1}]\{\delta\} \quad (11)$$

これらと節点力ベクトル $\{f\}$ ：

$$\{f\}=[G^{-1}]^T \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} [p(x,y)u_z(x,y)]_{z=-h/2}^{z=+h/2} dx dy \quad (12)$$

を用い、次の仮想仕事の原理より、

$$\{f\}^T d\{\delta\} = \int [\sigma] d[\epsilon] dV = [k] \{\delta\} d[\delta] \quad (13)$$

次式の剛性方程式が導かれる。

$$\{f\}=[k]\{\delta\} \quad (14)$$

なお要素剛性マトリックス $[k]$ は次式で計算される。

$$[k]=[G^{-1}]^T \int [N']^T [D] [N'] dV [G^{-1}] \quad (15)$$

4. 解析例と精度特性

図-1で周辺単純支持正方形板($a=b, h/a=0.3, \nu=0.25$)の上下表面に等分布荷重が $p/2$ ずつ載荷された場合を、本手法の1次理論要素(GHT1)とこれにせん断補正係数($\kappa=5/6$)を考慮した要素(GHT1sc), 2次理論要素(GHT2)さらに3次理論要素(GHT3)の有限要素法で解く。同時に Kirchhoff-Love 古典理論に基づく有限要素法(CPT), Greimann-Lynn³⁾のせん断変形を考慮した有限要素法(SDT)による解析を行い、厳密解⁴⁾との比較を通じて精度特性の検証を行う。

図-3に板中央位置でのたわみ(中央面の鉛直変位): $[u_z]_{z=0}$ の1辺当たりの要素等分割数の増大に伴う収束状況を示す。CPTの結果が最も多い分割数の段階で古典理論解に収束する以外は、何れもかなり少ない分割数でより厳密解に近い値の収束解に達し、なかでもGHT3の値はGHT2と共にほぼ厳密解に到達している。

図-4に板中央位置での鉛直 u_z の板厚方向分布の解析結果を示す。GHT2, GHT3の値が曲線分布を示してほぼ厳密解に一致しているが、その他は直線分布となっており精度的にも不十分となっている。

図-5に面内応力の解析例として板の隅角位置での面内せん断応力 σ_{xy} の板厚方向分布を示す。GHT2, GHT3の値は厳密解に近い曲線分布を与えている。その他はCPTとSDT, GHT1とGHT1scがそれぞれ同一の直線分布を与えるものとなっている。なお面内変位 u_a の解析結果もほぼこれらと同傾向を示すが、 u_a においてはGHT2, GHT3の値は厳密解に一致した曲線となっている。

図-6に面外応力の解析例として板中央位置での面外垂直応力 σ_{zz} の板厚方向分布を示す。GHT3の値が誤差はあるものの最も厳密解に近い曲線分布を与え、低次の理論要素になるに従ってGHT2, GHT1・GHT1scと誤差が増大し、SDTとCPTは σ_{zz} を無視した解である。

5. 結 言

以上の結果、一般化高次理論に基づくFEM解析: GHTが、理論次数の高次化にともなって精度が向上しており、2次理論要素解GHT2でかなり厳密解に近い高精度の解が得られ、3次理論要素解GHT3で更に精度が向上するが、その差はわずかであることが検証された。本研究の結果、厳密解への収束をめざす精密化有限要素法が構築され、一般化高次平板理論の有用化が図られた。今後は、伸縮挙動を含めた一般化を図る方針である。

6. 参考文献

- 1) Negishi Y., K.Hirashima: JSME International Journal, Series A, Vol.37, pp.272-281, No.3, 1994.
- 2) 根岸嘉和: 第45回理論応用力学講演会講演論文集, pp.565-656, 2005.
- 3) Greimann L.F., P.P.Lynn: Nuclear Engineering and Design, Vol.14, pp.223-230, 1970.
- 4) Pagano N.J.: Journal of Composite Materials, Vol.4, pp.20-23, 1970.

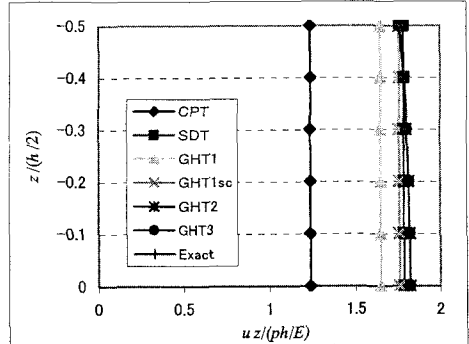


図-4 最大面外変位 u_z の板厚方向分布

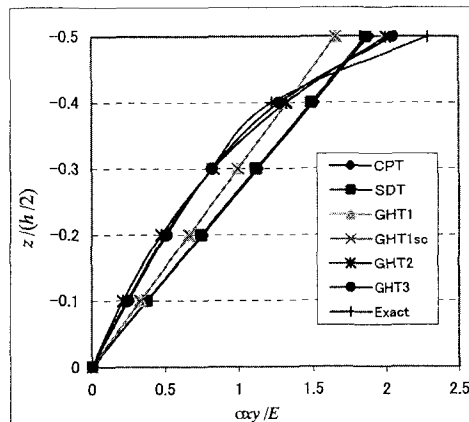


図-5 面内せん断応力 σ_{xy} の板厚方向分布

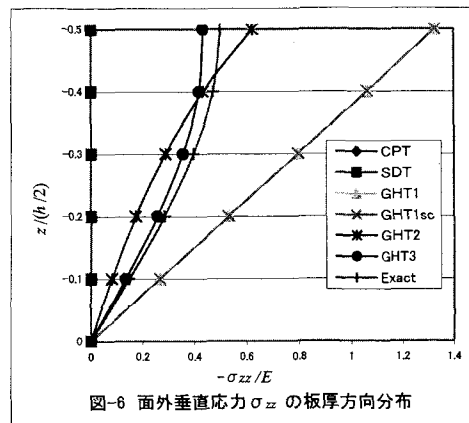


図-6 面外垂直応力 σ_{zz} の板厚方向分布