I －25

CST有限被覆近似による一般化要素の近似性能に関する数値実験

東北大学大学院　学生員　○車谷 麻緒
東北大学大学院　正　員　　寺田 賢二郎

1. はじめに

Shi[1]によるManifold法を前身とする有限被覆法（Finite Cover Method; FCM）[2]は，近似関数を構成する数学領域と支配方程式を満たす物理領域を独立に定義することができる．この性質に従えば，FCMにおける要素は通常の有限要素とは異なり，物理境界に沿って要素を配置しなくてよい．すなわち，要素内に外部境界や異種材料界面，不連続面などの物理境界が位置することやあるいは要素内に部分的な物理領域の存在を許容している．本研究では，FCMやX-FEM，GFEMなどの一般化有限要素法に共通である上記の要素を“一般化要素”[3]と名付け，これまで四辺形一般化要素について，その近似性能を検討してきた．

本研究は，このような一般化要素の近似性能を照査するものであり，特に1次の三角形（CST）有限被覆近似を用いた際の近似性能について，いくつかの数値実験を通して検討・考察するものである．

2. 界面要素を用いた有限被覆法[4]

2.1 弱形式のつり合い方程式

図–1に示される物理問題を考える．つり合い式，適合条件式はそれぞれ次式で与えられる．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{in } \Omega$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left\{\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\right\} \qquad \text{in } \Omega$$

ここで，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$は，それぞれ変位，Cauchy応力，微小ひずみであり，$\bar{\boldsymbol{b}}$は物体力を示している．そして，次に示す境界条件を満足させる必要がある．

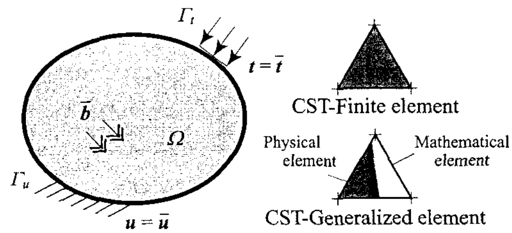
$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \qquad \text{on } \Gamma_u$$

$$\boldsymbol{t} := \boldsymbol{\sigma n} = \bar{\boldsymbol{t}} \qquad \text{on } \Gamma_t$$

ここで，$\boldsymbol{n}$は外向き単位法線ベクトルである．FCMでは，数学領域と物理領域の独立により，変位の境界条件が与えられるΓ_uにFEMでいうところの節点自由度が位置するとは限らない．これは，一般的なFEMのように節点自由度を操作して変位境界を課すことができないことを意味している．そこで，本研究ではFCMにLagrange未定乗数による界面要素を適用し，変位の境界条件を満足させる．この界面要素を用いたFCMの弱形式のつり合い方程式は，次式で表される．

$$\int_\Omega \nabla\delta\boldsymbol{u} : \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\lambda}\, d\Gamma = \int_\Omega \delta\boldsymbol{u}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}\, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}\cdot\bar{\boldsymbol{t}}\, d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_u} \delta\boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})\, d\Gamma = 0$$



図–1 2次元物理問題とCST一般化要素

本研究では，変位$\boldsymbol{u}$とLagrange未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$の両方を独立変数とし，Augmented Lagrangian法を用いることにより，通常のFEMのような変位拘束が可能な仕様としている．また，構成材料は弾塑性体を仮定し，その構成則にJ_2塑性理論を適用する．

2.2 一般化要素

本研究では，図–1右に示されるような，要素内に部分的に物理領域を有する要素を一般化要素と定義している．本研究においては，同図の一般化要素内における有色部分を物理要素（物理領域），その外側の黒線部分を数学要素（数学領域）と呼ぶこととする．

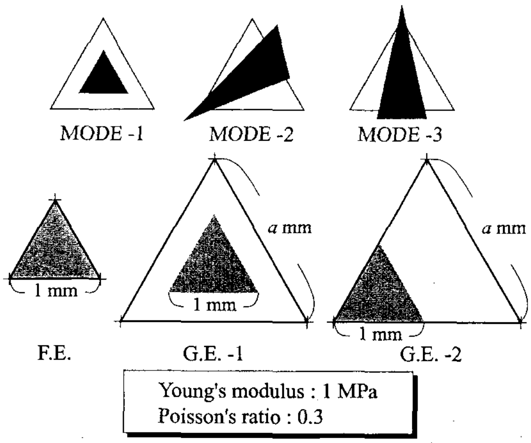
3. CST一般化要素の近似性能に関する数値実験

3.1 検討A：剛性行列の固有値

一般にFEMでは，剛性行列の固有値は，対応する正規化された固有ベクトルによる変形モードを生じるときに内部に蓄えられるひずみエネルギーの2倍に等しい．しかし，FCMでは一般に物理形状が同じであってもこれを覆う数学被覆の大きさや位置により剛性行列や剛性行列の固有値，固有ベクトルがそれぞれ異なる．そこで本検討では，まずFEMの剛性行列の固有値解析を行い，各固有ベクトルをFCMの解析対象に対して強制変位として与えて，そのときのひずみエネルギーの2倍の値をFEMの固有値と比較する．

解析対象は，図–2に示されるような辺長1 mmの正三角形とし，そのCST有限要素（図中のF.E.）を基準とする．一方，一般化要素（図中G.E. -1, -2）については，1 mmの正三角形物理領域に対して数学要素の大きさをa = 2, 100とし，それぞれ異なった位置にあるものを対象とする．同図に示される材料パラメータを用いて，平面ひずみ状態を仮定する．

解析結果をまとめたものを表–1に示す．この表から分かるように，一般化要素の変形性能はその物理領域と同形状の有限要素とまったく同じ性能を表している．したがって，本小節の検討において数学要素と同形状の物理要素を有す



図−2 検討 A のモデルと CST 要素の変形モード

表−1 検討 A の解析結果

	F.E.	G.E. -1, $a = 2$	G.E. -2, $a = 2$
MODE-1	1.66543	1.66543	1.66543
MODE-2	0.666173	0.666173	0.666173
MODE-3	0.666173	0.666173	0.666173
	F.E.	G.E. -1, $a = 100$	G.E. -2, $a = 100$
MODE-1	1.66543	1.66543	1.66543
MODE-2	0.666173	0.666173	0.666173
MODE-3	0.666173	0.666173	0.666173

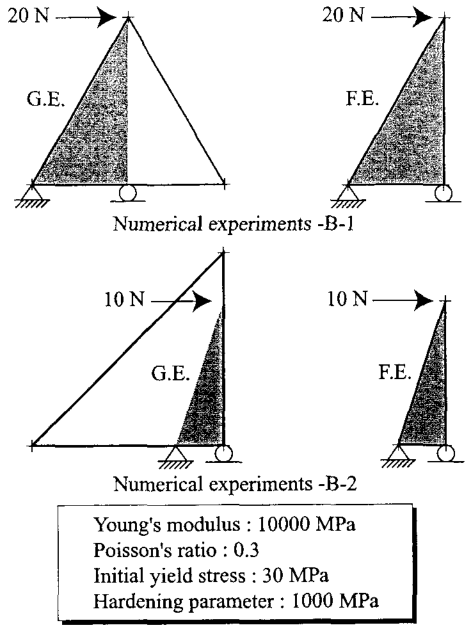
る CST 一般化要素は，その物理形状と同形状の CST 有限要素と同じ変形性能を有すると考えれる．

3.2 検討 B：1 要素数値実験

前小節では，数学要素と物理領域が相似なものを対象としていた．しかし，実際の解析における物理領域は様々な形状を成している．そこで，本小節では数学要素と相似形を成さない物理領域を有する一般化要素の近似性能を検討する．前検討においては，剛性行列の固有値を用いて比較・検討を行ったが，本検討では近似関数を構成する領域が有限要素と一般化要素で異なるため，ここでは両者に平等な荷重を与える数値実験を採用する．

検討対象となるモデルは**図–3**に示される 2 種類の弾塑性体である．同図に示される材料パラメータを用い，平面ひずみ状態を仮定して荷重制御数値実験を行う．

荷重最終ステップ時における数値実験結果をまとめたものを**表–2**に示す．表から分かるように，有限要素と一般化要素の x, y 方向変位・相当塑性ひずみの値が，それぞれのモデルにおいて一致している．これは，CST 有限被覆近似を用いた FCM による解析において，物理境界を含む一般化要素は CST 有限要素と同等の近似性能を保持していること意味するものである．なお，同表には示していないが，弾性域においても両者の結果は一致したものとなっている．



図−3 検討 B の数値実験対象

表−2 検討 B の解析結果

B-1	Disp. x	Disp. y	Eff. plastic strain
F.E.	1.51682E–01	−1.89325E–02	4.21122E–02
G.E.	1.51682E–01	−1.89325E–02	4.21122E–02
B-2	Disp. x	Disp. y	Eff. plastic strain
F.E.	1.22211E–01	−9.30019E–03	4.02381E–02
G.E.	1.22211E–01	−9.30019E–03	4.02381E–02

4. おわりに

本研究では，1 次の三角形有限被覆近似を用いた際の一般化要素の近似性能について，いくつかの数値実験を通して検討・考察した．そして，なかでも三角形の物理領域を有する CST 一般化要素は，その物理領域と同形状の CST 有限要素とほとんど同様の近似性能を保持しているなどの知見を得た．また，本研究で得られた成果は，近年 CST 近似の定ひずみ性を利用した不連続面進展解析[5]などにおける精度保証にも適用される．

参考文献

1) Shi, G.H. : Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing, Report*, No.92–1, U.S. Army Research Office, 1991.
2) Terada, K., Asai, M., Yamagishi, M. : Finite cover method for linear and nonlinear analyses of heterogeneous solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.58, pp.1321–1346, 2003.
3) 車谷麻緒，寺田賢二郎：有限被覆法における一般化要素の近似性能に関する基礎的研究：日本計算工学会論文集，論文番号 20030027, pp.127–136, 2003.
4) Kurumatani, M., Terada, K. : Finite cover method with mortar elements for elastoplasticity problems, *Computational Mechanics*, in press.
5) 浅井光輝，寺田賢二郎：有限被覆法による不連続面進展解析，応用力学論文集，土木学会，Vol.6, pp.193–200, 2003.