I －24　　初期不整による構造強度のメカニズムの解明

東北大学　学○ 藤澤 利光　　正　池田清宏

1.　はじめに

弾塑性座屈を起こす構造系の耐荷力は，初期たわみや残留応力などの初期不整の介在により低下してしまうという，初期不整依存性を持つことが Koiter [1]により明らかにされた．その後も初期不整感度特性を明らかにすべく，様々な試みがなされた [2]．しかしこれまでの研究では，与えられたモードに対する初期不整依存性を求めることに終始している．一方，実構造系では無数に多くの初期不整パターンが存在していることが，初期不整依存性を実務に取り入れる上で問題であった．

そこで本研究では，構造系全体の対称不整と反対称不整が異なる初期不整感度をもつことに着目し，この両者の影響を合成することにより一般化初期不整感度則を提案する．この感度則は，様々な初期不整による耐荷力の低下特性を表すことができる画期的なものである．簡単な構造物の解析により理論の妥当性を検証し，比較的規模の大きい構造系の解析により実問題への適用性を示す．

2.　初期不整感度則

初期不整を含む系の非線形釣合式を

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, f, \epsilon \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

とする．この系の単純対称分岐において，初期不整の大きさが十分小さい場合には，不整を対称不整と反対称不整とに分けて考えた場合，座屈荷重の低下量は，

- 対称不整

$$\tilde{f}_c = f_c - f_c^0 \sim -C_0 \epsilon \boldsymbol{e} \qquad (2)$$

- 反対称不整

$$\tilde{f}_c = f_c - f_c^0 \sim (-C_0 \epsilon \boldsymbol{e})^{2/3} \qquad (3)$$

と漸近的に表される．ここに C_0 はある正定数であり，$\boldsymbol{e}$ は初期不整パターンベクトルあり，$(e_1, e_2, \ldots)$ を表す．

3.　一般化初期不整感度則

これまでの理論は，式 (2)，(3) のように対称不整と反対称不整とが独立に扱われていた．そこで，対称性をもつ初期不整パターンベクトルの成分を e_i^+，反対称な初期不整パターンベクトルの成分を e_i^- とし，一般化初期不整感度則を

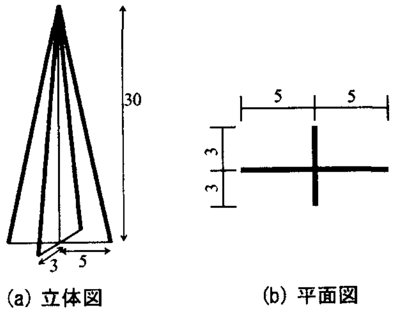
$$\tilde{f}_c = \sum_{i=1} C_i^+ \epsilon e_i^+ + \left(\sum_{i=1} C_i^- \epsilon e_i^- \right)^{2/3} \qquad (4)$$

と提案する．この式は，従来の式 (2)，(3) を包含する形となっている．

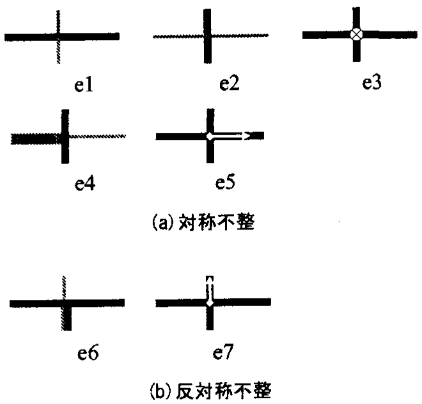
4.　4バートラスの解析

4.1　解析対象

図–1 に示す4バートラス ($E = 1.0$，$A = 1.0$) に **図–2** に示す初期不整を与える．この構造系の座屈モードは，y 軸方向に倒れるモードであり，初期不整は x 軸に対して対称不整と反対称不整とに分けることができる．e1，e2，e4，e6 では，部材の断面積を変えており，e3，e5，e7 では，頂点の位置を動かしている．例えば，e1，e2 では細線の部材の断面積を同じだけ減らしている．一方，e4，e6 では，細線の部材の断面積を減らすのに対し，太線の部材断面積を同じだけ増加させている．**図–2(a)** は x 軸に対して対称性のある不整パターンであり，耐荷力の変化量は不整量の 1 乗に比例する．一方，**図–2(b)** は反対称な不整パターンであり，耐荷力の変化量は不整量の 2/3 乗に比例する．



図– 1　4バートラス



図– 2　初期不整パターン

4.2 解析結果

各々の初期不整を単独に与えた場合に対して求められた，座屈荷重の変化量を示す式をそれぞれ示す．

$$e1 \quad \tilde{f}_{c1} \simeq 400.224\,\epsilon\,e_1 \tag{5}$$

$$e2 \quad \tilde{f}_{c2} \simeq -1.178\,\epsilon\,e_2 \tag{6}$$

$$e3 \quad \tilde{f}_{c3} \simeq 26.396\,\epsilon\,e_3 \tag{7}$$

$$e4 \quad \tilde{f}_{c4} \simeq 0.004\,\epsilon\,e_4 \tag{8}$$

$$e5 \quad \tilde{f}_{c5} \simeq -0.025\,\epsilon\,e_5 \tag{9}$$

$$e6 \quad \tilde{f}_{c6} \simeq 82.012\,(\epsilon\,e_6)^{2/3} \tag{10}$$

$$e7 \quad \tilde{f}_{c7} \simeq 61.436\,(\epsilon\,e_7)^{2/3} \tag{11}$$

以上の式を式(4)の形に合成することにより，すべての初期不整に対応する一般化初期不整感度則が得られる．

$$f_c \simeq f_0 - \{400.224\,\epsilon\,e_1 - 1.178\,\epsilon\,e_2 - 26.396\epsilon\,e_3 + (82.012^{3/2}\epsilon\,e_6 + 61.432^{3/2}\epsilon\,e_7)^{2/3}\} \tag{12}$$

式(12)の妥当性を検証するため，ランダムに初期不整を与え，得られる耐荷力の低下量の誤差を求めた．その結果を表-1に示す．このように，7次元の初期不整に対する耐荷力の減少量を比較的精度良く求めることができた．

表- 1 ランダム初期不整に対する4バートラスの耐荷力

		パターン			
		1	2	3	4
ε ×10^{-5}	e1	9.569	4.337	0.872	0.975
	e2	2.447	1.073	4.451	7.006
	e3	1.536	1.817	0.170	1.508
	e4	4.852	9.517	4.062	8.315
	e5	0.179	3.236	2.745	6.663
	e6	8.776	6.543	4.772	6.943
	e7	9.920	8.194	8.251	2.173
理論値		397.839	397.835	397.930	397.864
計算値		396.861	397.842	397.933	397.869
絶対誤差		0.021	0.006	0.003	0.005
相対誤差		9.051	2.674	1.778	2.519

相対誤差(%) $= \{(\text{理論値}) - (\text{計算値})\}/\tilde{f} \times 100$

5. トラスタワーの解析

5.1 解析対象

図-3に示すトラスタワー($E = 2.0 \times 10^5$，$A = 1.0$)にy軸について対称・反対称な部材断面積に対する初期不整，節点位置に対する初期不整をそれぞれ与え，以下4バートラスと同様にしてその妥当性，実用性を検証する．

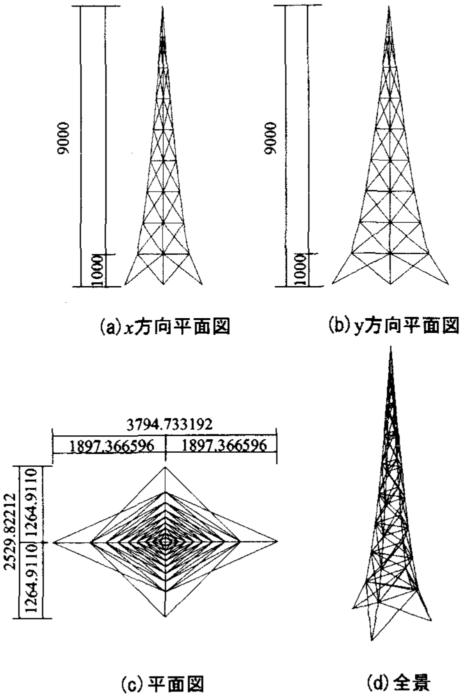


図- 3 トラスタワー

5.2 解析結果

部材断面積に対して，y軸に関して対称・反対称な初期不整をランダムに与えた場合の耐荷力の低下量の，理論値と計算値との比較を表-2に示す．56次元の初期不整に対して，相対誤差1%以下と，非常に精度良くその座屈荷重を再現できているといえる．

表- 2 ランダム初期不整に対するトラスタワーの耐荷力

	パターン1	パターン2	パターン3
理論値	2476.063	2478.809	2478.476
計算値	2475.987	2478.737	2478.417
相対誤差(%)	0.306	0.329	0.261

6. 結論

本論文では一般化初期不整感度則を提案し，これにより，実構造物に対してもこの理論が有効であることが検証できた．

参考文献

1) Koiter WT (1945), *On the Stability of Elastic Equilibrium, Dissertation*, Delft, Holland (English translation: NASA technical translation F **10: 833**, 1967).

2) Ikeda K, and Murota K, (2002), *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials: Engineering Use of Group-Theoretic Bifurcation Theory*, Appl. Math. Sci. Ser. **149**, Springer-Verlag, New York NY.