I −23

# 対称性を持つ構造系におけるScaled Corrector法の高精度化と分岐解析法の提案

東北大学　学○ 柳本彰仁　　正　池田清宏

## 1. はじめに

構造系の分岐解析において行われる固有値解析は，大規模構造系において大きな計算容量と計算時間を要するため，可能であれば回避したいボトルネックである．野口・久田[1]は，分岐点における固有方程式と収束前後のNewton-Rhapson法による反復解法式の類似性に着目し，分岐点周辺でScaled Corrertor(変位修正ベクトル)によって座屈モードを近似できることを発見した．

しかし，著者らが，対称性をもつ構造物に対してScaled Corrector法を適用した結果，得られる座屈モードの精度が低いのに加えて，二重分岐点には適用できないなどの問題点を有することが判明した．

そこで本研究では，対称性を持つ構造物に対して，Scaled Corrector法に群論的分岐理論，ブロック対角化理論，離散化フーリエ級数の考えを組み込むことによって，より精確な座屈モードを抽出し，固有値解析を要しない効率的な分岐解析手法を提案する．

## 2. Scaled Corrector

$n$ 次元の構造系の接線剛性行列 $K$ の逆行列は，固有値 $\lambda_j$ と固有ベクトル $\Phi_j (j = 1, \ldots, n)$ を用いて，

$$K^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \Phi_j (\Phi_j)^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

と展開できる．この中の最小固有値 $\lambda_1$ が0に漸近すると，$1/\lambda_1$ が非常に大きくなるため，$K^{-1}$ は十分な精度で，以下のように表すことができる．

$$K^{-1} \simeq \frac{1}{\lambda_1} \Phi_1 (\Phi_1)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

Newton-Rhapson法の修正子計算は，修正子 $(\delta u, \delta\Lambda)$，荷重ベクトル $p$，残差ベクトル $E(u,\Lambda)$ に対して，

$$K\delta u - \delta\Lambda p = -E(u,\Lambda) \tag{3}$$

という反復計算を行い，ノルム $\|E\|$ が小さくなるまで繰り返すものである．式(2)，式(3)より

$$\delta u = K^{-1}(\delta\Lambda p - E(u,\Lambda)) \tag{4}$$

$$\simeq \frac{(\Phi_1)^{\mathrm{T}}(\delta\Lambda p - E(u,\Lambda))}{\lambda_1} \Phi_1 \tag{5}$$

修正子 $\delta u$ は近似的に $\Phi_1$ と同方向のベクトルであることが分かる．この修正子 $\delta u$ を正規化したもの，それがScaled Corrector $\Phi^{sc}$ と呼ばれている．

## 3. 対称性と解空間のブロック対角化

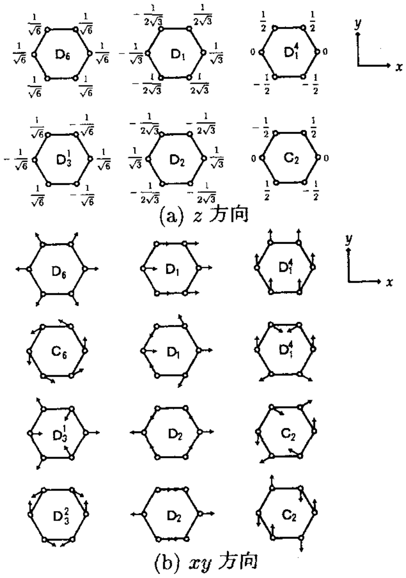
対称性を持つ構造物は，並進・回転・鏡映などの対称性で構成される群により対称性を表すことができる．群は部分群を持ち，部分群は座屈モードの対称性を表す[2]．この性質を利用したブロック対角化理論[3]により，系の支配方程式を独立した式に分解することで，精度の高い座屈モードを抽出できる．

適用例として，図2-aに示すモデルの正6角形状節点に着目する．このモデルの解空間は，離散化されたフーリエ変換を用いると，図1の計18種類のベクトルを基底ベクトルとして取ることができる．この基底ベクトルを対称性により分類すると

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{D}_6 : \text{正6角形状} & \mathrm{D}_3^1 : \text{3軸対称}\ (x\ \text{軸含む}) \\ \mathrm{D}_3^2 : \text{3軸対称}\ (y\ \text{軸含む}) & \mathrm{D}_2 : \text{2軸対称} \\ \mathrm{D}_1 : x\ \text{軸対称} & \mathrm{D}_1^4 : y\ \text{軸対称} \\ \mathrm{C}_6 : \text{60度の回転対称} & \mathrm{C}_2 : \text{180度の回転対称} \end{array} \right.$$

という8つの部分群に対応する部分空間に分解できる．

この部分空間ごとにScaled Corrector $\Phi^{sc}$ をブロック対角化すると，8つのベクトル $(\Phi_{\mathrm{D}_6}, \Phi_{\mathrm{D}_3^1} \Phi_{\mathrm{D}_3^2}, \Phi_{\mathrm{D}_2}, \Phi_{\mathrm{D}_1}, \Phi_{\mathrm{D}_1^4}, \Phi_{\mathrm{C}_6}, \Phi_{\mathrm{C}_2})$ に分解できる．主経路の変形モードを示す $\Phi_{\mathrm{D}_6}$ を除く，残りの7つのベクトルは，座屈モードに対応している．



(a) $z$ 方向

(b) $xy$ 方向

**図−1 離散化フーリエ変換が表す変形モード**

## 4.　固有値解析を用いない分岐点探索法

固有値解析を用いずに分岐解析するにあたって，分岐点の位置の探索が必要となってくる．本研究では接線剛性行列 $K$ の標準固有値問題

$$K\Phi = \lambda\Phi \tag{6}$$

を考えた二つの分岐点探索法を検討する．

(Ｉ) 式 (6) より，ある部分群 $\mu$ に対して，次式が成立．

$$(\Phi_\mu)^{\mathrm{T}} K \Phi_\mu = \lambda_\mu \quad (\mu = \mathrm{D}_6, \mathrm{D}_3^1, \mathrm{D}_3^2, \mathrm{D}_2, \cdots) \tag{7}$$

ここで，$\lambda_\mu$ が 0 になる点を分岐点として探索．

(Ⅱ) 式 (6) より，分岐点では $K\Phi = 0$ となる性質を利用し，ある部分群 $\mu$ に対する誤差ベクトル $E_\mu$ を式 (8) のように定義し，$\|E_\mu\|$ が 0 になる点を分岐点として探索．

$$K\Phi_\mu = E_\mu = \| E_\mu \| \cdot E_\mu / \| E_\mu \| \tag{8}$$

(Ｉ)，(Ⅱ) の方法はともに，分岐点を探すのみでなく，分岐点の座屈モードに対応する $\Phi_\mu$ の特定も行う．

## 5.　解析結果と考察

図 2-a のモデルの分岐解析により図 2-b の荷重変位曲線と，その曲線上の単純分岐点 A，二重分岐点 B，C が得られた．以下，これらの分岐点の探査と，対応する $\Phi_\mu$ の精度の結果を示す．

### 5.1　分岐点探索法の比較

図 2-c に分岐探索法 (Ｉ) と (Ⅱ) の結果を示す．(Ｉ) は縦軸に $\lambda_\mu$ を，(Ⅱ) はノルム $\|E_\mu\|$ を縦軸としているが，分岐点の判断しやすさのため，$\Phi_\mu \cdot E_\mu < 0$ のとき $\|E_\mu\|$ は負の大きさを持つこととした．いずれの図も縦軸の変数の値が 0 となる点を分岐点と判断し，破線は固有値解析によって求めた分岐点の位置を示す．

いずれの方法でも縦軸の変数の値が正から負へと移行する点である分岐点を容易に見つけることができ，また 7 つのベクトルの中でどのベクトルが座屈モードとなるかも容易に確認できた．しかし，値のばらつき方から，(Ⅱ) の方法がより有利であることが判明した．

### 5.2　分岐点周辺における座屈モードとの精度比較

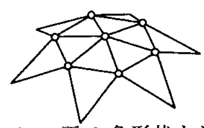
座屈モードの精度比較を，座屈モードに対応する $\Phi_\mu$ や $\Phi^{sc}$ について，最小固有値に対応する固有ベクトルとの内積を取り，その内積が 1 となるかどうか確認することで行った．図 2-d のいずれの図とも，縦軸の内積の値は 0.99999 から 1 の範囲を示した．

分岐点探索法により，単純分岐点 A の座屈モードに対応していることを確認した $\Phi_{\mathrm{D}_3^1}$ と，$\Phi^{sc}$ の精度を比較した結果を図 2-d-(a) に示す．$\Phi^{sc}$ を見ると，分岐点のごく近傍でしか高い精度をを保証できていない．一方，$\Phi_{\mathrm{D}_3^1}$ は分岐点周辺でも高い精度を維持できており，座屈モード抽出において，本手法による $\Phi_{\mathrm{D}_3^1}$ の方が信頼性が高いことが確認できる．

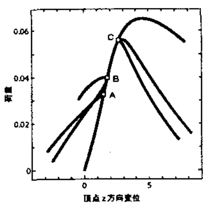
二重分岐点 B においても，本手法により求めた $\Phi_{\mathrm{D}_2}$，$\Phi_{\mathrm{C}_2}$ の精度は非常に高いものであった (図 2-d-(b))．

## 6.　結論

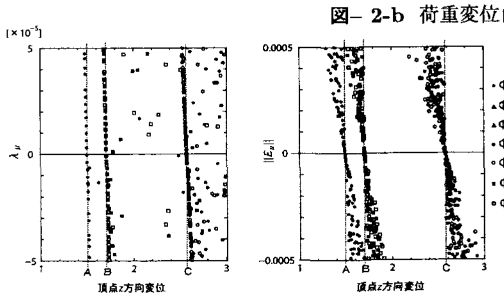
Scaled Corrector 法を改良することで，精度のよい座屈モードを抽出することができた．この方法は，二重分岐点にも適用でき，分岐点から多少離れても座屈モードが抽出できるため，非常に有効な方法と言える．



**図– 2-a** 正 6 角形状トラスドームモデル

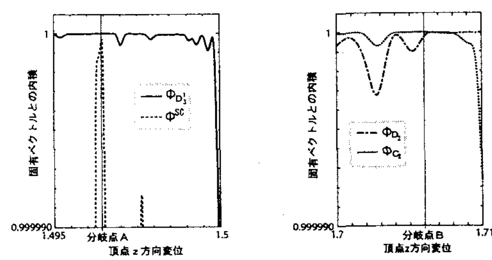



**図– 2-b** 荷重変位曲線




(Ｉ) の方法　　(Ⅱ) の方法

**図– 2-c** 分岐点探索結果




(a) 単純分岐点 A 周辺　　(b) 二重分岐点 B 周辺

**図– 2-d** 分岐点周辺での精度比較

## 参考文献


1) 野口裕久，久田俊明：Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発．日本機械学論文集 (A 編)，pp2191–2198，58 巻 555 号，1992.

2) 池田清宏，室田一雄：構造系の弾性座屈と分岐，コロナ社，2001.

3) K.Murota and K.Ikeda : Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1991.