

II-48

粘着性河床におけるステップの形成機構

 東北大学大学院 学生員 ○島田 典和
 東北大学大学院 正会員 泉 典洋

1. はじめに

粘着性土砂で構成された河道において流れが射流である急勾配河床では、河床は不安定となり連続した段差形状（ステップ）が形成されることがわかっている¹⁾。山口、泉²⁾は、流下方向および水深方向二次元のレイノルズ方程式を用いて芦田が行った線形安定解析を行い、卓越波長が水深の6から60倍程度となることを明らかにした。ただし、彼らの解析では擾乱を与える前の平坦河床における基準状態の流速分布解をコサイン関数で近似し、近似解法の一つである接合漸展開法を用いていた。本研究では、より精度の高い結果を得るためにChebyshev多項式展開を用いたスペクトル法を使って線形安定解析を行う。

2. 理論解析

(1) モデル

図-1に示すような二次元の開水路流れを考える。流れは二次元レイノルズ方程式と水面および底面における境界条件によって決定される。粘性土で構成されるような河床では、河床が侵食される速度は底面せん断力によって決定され、その侵食速度で河床高が低下する。このような侵食性の河床において、擾乱を与え線形安定解析を行う前の基準状態を考える。この時、河床は平坦であり、水深 D の等流状態が実現しているとする。

(2) 定式化

流れはレイノルズ方程式および連続の式で表される²⁾。河床高さの時間変化は底面せん断力の関数として表される侵食速度 $\bar{E}$ を用いて次式のように表される²⁾。

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = -\frac{\bar{E}}{\cos \phi} = -\frac{\alpha(\bar{\tau}_b - \bar{\tau}_{th})^3}{\cos \phi} \quad (1)$$

ここで λ_p は空隙率、 ϕ は河床勾配角、 $\bar{\tau}_b$ は底面せん断力であり、 $\bar{\tau}_{th}$ は限界せん断力を表す。

水面に対して接線方向のせん断力及び法線方向の応力がゼロとなる力学的境界条件、法線方向の流速がゼロとなる運動学的境界条件は次式となる。

$$\bar{e}_{ts} \cdot \bar{T} \cdot \bar{e}_{ns} = 0 \quad (2)$$

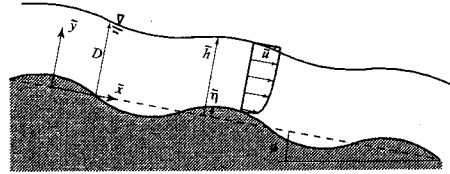


図-1 河床の概念図

$$\bar{e}_{ns} \cdot \bar{T} \cdot \bar{e}_{ns} = 0 \quad (3)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{e}_{ns} = 0, \quad \bar{u} = (-\Psi_y, \Psi_x) \quad (4)$$

ここで $\bar{T}$ は応力テンソル、 $\bar{e}_{ts}$ および $\bar{e}_{ns}$ はそれぞれ水表面に対する単位接線ベクトルおよび単位法線ベクトルであり、次のように表される。

$$\bar{e}_{ts} = \left(1, \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\right) / \left[1 + \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\right)^2\right]^{1/2} \quad (5)$$

$$\bar{e}_{ns} = \left(-\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}, 1\right) / \left[1 + \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\right)^2\right]^{1/2} \quad (6)$$

底面における運動学的境界条件及び力学的条件が次式で表され、力学的条件としてスリップ速度と摩擦速度の比が一定となる条件が次式で与えられる²⁾。

$$\bar{u} \cdot \bar{e}_{nb} = 0 \quad (7)$$

$$\bar{u}_b^2 = \bar{\kappa}^2 \bar{\tau}_b$$

$$(\bar{u} \cdot \bar{e}_{tb})^2 = \bar{\kappa}^2 \bar{e}_{tb} \cdot \bar{T} \cdot \bar{e}_{nb} \quad (8)$$

ここで $\bar{\kappa}$ はスリップ速度と摩擦速度の比を表す係数である。また $\bar{e}_{tb}$ および $\bar{e}_{nb}$ はそれぞれ河床面に対する単位接線ベクトルおよび単位法線ベクトルであり、次式のように表される。

$$\bar{e}_{tb} = \left(1, \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}\right) / \left[1 + \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}\right)^2\right]^{1/2} \quad (9)$$

$$\bar{e}_{nb} = \left(-\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}, 1\right) / \left[1 + \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}\right)^2\right]^{1/2} \quad (10)$$

(3) 無次元化

次のような無次元化及び座標変換を導入し、擾乱発生前の平坦床における基準状態の解を求める。

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{U_f}{\varepsilon} (u, v), \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{h}, \bar{\eta}) = D(x, y, h, \eta) \quad (11)$$

$$\bar{p} = (U_f / \varepsilon)^2 p, \quad \bar{t} = \frac{(1 - \lambda_p) D}{\alpha (\rho U_f^2)^3} t \quad (12)$$

$$\xi(x) = x, \quad \chi(x, y) = \frac{y - \eta(x)}{h(x) - \eta(x)} \quad (13)$$

このとき、流関数を用いたレイノルズ方程式及び河床高さの時間変化式は次のように表される。

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial y} - \varepsilon^2 \nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{(\tau_b - \theta)^3}{\cos \phi} \quad (15)$$

ここで ε は $U_f D$ で無次元化された渦動粘性係数であり0.077²⁾である。 τ_b は無次元底面せん断力であり、 $\theta = \tau_{th}/\tau_0$ である。この時、 τ_0 は擾乱を与える前の等流状態での底面せん断力を表す。上式の座標変換を導入し、式(14)および境界条件により $\Psi_0(\chi)$ が次のように得られる。

$$\Psi_0(\chi) = \frac{1}{6} (-6\kappa\chi - 3\chi^2 + \chi^3) \quad (16)$$

(4) 線形安定解析

このような基準状態に対して、河床に次式で表されるような微小擾乱を与え線形安定解析を行う。

$$\eta = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (17)$$

ここで A は擾乱の微小振幅、 k は擾乱の波数、 ω は複素角速度である。複素角速度 ω の虚部が擾乱の発達速度を表しており、その値が正であれば微小擾乱は発達することになる。

上式の摂動に対応する Ψ および p 、 h 、 η をそれぞれ摂動展開する。次に、Chebyshev多項式展開を用いて ω を固有値とする一般化固有値問題を構成する。この固有値問題についてMathematicaを用いて ω を求めた。得られた ω の虚部 ω_i が発達速度となる。

3. 結果及び考察

図-2に抵抗係数 $C_f = 0.055$ に相当する $\kappa = 0.011$ における発達速度 ω_i の等高線図を示す。横軸が無次元波数 k 、縦軸がフルード数 Fr を表している。ここで実線が正のコンタ、太い実線が中立曲線を表しており、太い実線の内部で ω_i は正の値をとり河床が不安定になることを示している。また破線はピーク的位置を示し、 ω_i の値を最大にする無次元卓越波数 k_c が0.1~0.6となることがわかる。ここで卓越波長 $\bar{\lambda}$ は $\bar{\lambda} = 2\pi D/k_c$ と表せることから、卓越波長は水深の10~60倍程度となる。この結果は山口・泉²⁾の解析結果とは若干異なり、河床が不安定となり擾乱が発達する領域および卓越波長は小さくなっている。

また図-2に筆者らが行った実験値³⁾及び芦田・澤井¹⁾による実験値をプロットした。筆者らが行った

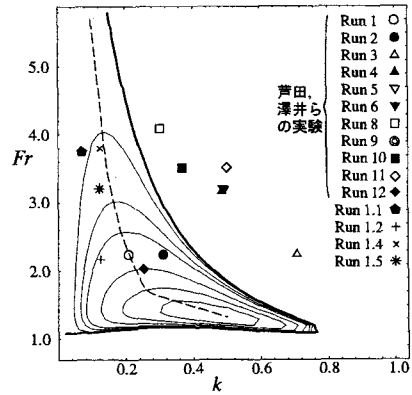


図-2 ω_i の等高線図。 $\kappa=0.011$ ($C_f=0.05$)

実験の結果は理論解析で求められた卓越波数とよく合う結果となった。理論解析により得られた卓越波長は初期擾乱の波長を表すので、実験で得られている初期波長と合っている。しかし、芦田・澤井¹⁾の実験値との比較は無次元波数 k が右方向へずれる結果となった。これはステップが発達するに伴い波長が短くなり、無次元波数 k が大きくなるため、ある程度時間が経過し十分発達したステップの波長を観測している彼らの実験では理論値と異なる結果になったと考えられる。また、ステップが発達し振幅が大きくなると、線形解析では考慮できない非線形性の影響が無視できなくなるため、今回の理論解析では説明できなかったと考えられる。

4. 結論

- 河床が不安定となる領域は山口・泉²⁾による結果と比べ狭い範囲となり、その発生初期の擾乱の卓越波長は水深の10~60倍程度になる。
- 発生初期の擾乱の波長は理論によって説明できたが、十分に発達したときのステップの波長は非線形性の影響が強いため本研究の線形解析では説明できない。

参考文献

- 1) 芦田和男, 澤井健二: 裸地斜面における流路の形成過程に関する研究 (3), 京都大学防災研究所年報, 第20号, B-2, 1977.
- 2) 山口里実, 泉 典洋: 侵食性河床におけるステップ発生の線形安定性理論, 水工学論文集, Vol. 45, pp.751-756, 2001.
- 3) 島田典和, 泉 典洋: 侵食性河床上におけるステップ形成に関する実験的研究, 日本流体力学会年会 2003