

I-24

弾性波散乱による多孔質弾性体中の散乱体形状再構成

 東北大学大学院 正員 ○山本晃司
 東北大学大学院 正員 北原道弘

1. はじめに

流体で飽和した多孔質体中の散乱体の弾性波による検出・評価を行うために、Biot の多孔質弾性 (poroelasticity) モデルを用いた逆問題の定式化を行う。このモデルでは、伝播する波の性質として、横波 (T-波)、二種類の縦波 (速い縦波 LS-波及び遅い縦波 LF-波) の三つの波が現れる¹⁾ など、通常の弾性体の波とは異なる特徴が現れる。

ここでは、領域型積分による散乱場の表現と Born 近似を用いて、多孔質弾性体内に存するキャビティによって散乱された波の散乱振幅からその形状を再構成する定式化と、再構成の例を示す。

2. 多孔質弾性体の散乱問題

2.1 散乱場の領域型の積分による表現

図-1に示すように、多孔質弾性パラメータ $(\lambda, \mu, \bar{\rho}, \bar{\alpha}, 1/M, 1/\bar{m})$ の無限媒質 D (母材) 中に、異なる多孔質弾性パラメータを持つ散乱体 D^c が存在する場合を考える。散乱体と母材の弾性パラメータの差は $(\Delta\lambda, \Delta\mu, \Delta\bar{\rho}, \Delta\bar{\alpha}, \Delta(1/M), \Delta(1/\bar{m}))$ で表されることがとす。各パラメータの意味と本論で用いた値は表-1に示す。

この散乱体 D^c に、単位ベクトル $\hat{p}^{(i)}$ の方向に伝播する角周波数 ω の時間調和波である $w_{(i)}$ -波 ($w_{(i)}$ は波の種類 LS, LF または T) $q^{(i)}(x, t) = q^{(i)}(x)e^{-i\omega t}$ が入射し、 $\hat{p}^*$ 方向の点 y で、散乱波を観測する問題を考える。ここで $q^{(i)}(x) = \{u_i(x), p(x)\}$ であり、 u_i は x_i 方向の固体骨格部の変位、 p は間隙流体圧力を表す。散乱体による等価散乱源 (Equivalent source) B 及び周波数領域の基本解 $[G]$ を用いると、点 y における散乱波動場 $q^{(s)}(y)$ は、

$$q_K^{(s)}(y) = \int_D G_{IK}(x, y) B_K(q^{(i)}; x) dVx \quad (1)$$

と表せる。等価散乱源 B は

$$B_i = [\Delta\bar{\rho}\omega^2 u_i(x) - \{ \Delta C_{ijkl} u_{k,l}(x) - \Delta\bar{\alpha} p(x) \delta_{ij} \} \frac{\partial}{\partial x_j}] \quad (2)$$

$$B_4 = \left[\Delta \left(\frac{1}{M} \right) p(x) - \left\{ \Delta\bar{\alpha} u_i(x) + \Delta \left(\frac{1}{\bar{m}\omega^2} \right) p_{,i}(x) \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \quad (3)$$

と書ける。ここで u_i, p は入射波と散乱波の和である全変位場である。

ここで、基本解に遠方近似²⁾

$$G_{IK}(x, y) \simeq \sum_{w_{(s)}} \bar{g}_{IK}^{w_{(s)}}(\hat{p}^{(s)}) e^{-ix \cdot \hat{p}^{(s)}} \frac{e^{ik_{w_{(s)}} r}}{r} \quad (4)$$

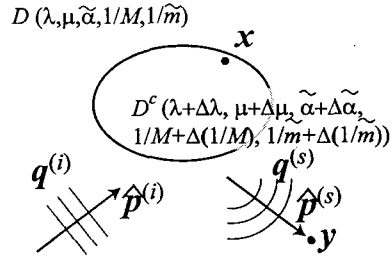

 図-1 多孔質弾性体 D 中の散乱体 D^c による散乱

表-1 多孔質弾性パラメータ

記号	意味	本論中で用いた値
μ, λ	非排水 Lamé 定数	$\mu = \lambda$
$\bar{\alpha}$	複素連成パラメータ	$\alpha - \beta$ (散逸無し)
α	Biot の定数	$\beta < \alpha \leq 1$
β	孔隙率	0.2
M	Biot の弾性定数 ⁴⁾	5μ
$\bar{m}$	複素質量パラメータ	$\bar{m} = \rho_f / \beta - ib$
ρ, ρ_f	全体及び流体の密度	$\rho = 3\rho_f$
b/m	無次元散逸パラメータ	0 (散逸無し)

を導入すると、散乱波動場は

$$q_K^{(s)far}(y) = \sum_{w_{(s)}} A_K^{w_{(s)}}(\hat{p}^{(s)}, \omega) \frac{e^{ik_{w_{(s)}} r}}{r} \quad (5)$$

と書きなおすことができる。ここで、 $k_{w_{(s)}}$ は散乱波の波数、 r は散乱体から観測点 y までの距離を示す。また、 $A^{w_{(s)}}$ は波 w に対応する散乱振幅であり、

$$A_K^{w_{(s)}}(\hat{p}^{(s)}) = \int_D \bar{g}_{KI}^{w_{(s)}}(\hat{p}^{(s)}) \Gamma(x) B_I e^{-ik_{w_{(s)}} x \cdot \hat{p}^{(s)}} dVx \quad (6)$$

と示される。ここで、 $\Gamma(x)$ は等価散乱源の分布を示す関数であり、

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in D^c \\ 0 & \text{for } x \in D \setminus D^c \end{cases} \quad (7)$$

という値をとる。

2.2 Born 逆解析

式 (6) の右辺には、散乱体 D^c の物性値、母材 D の物性値、散乱体の拡がり、及び散乱体内での散乱波動場の情報が含まれる。従って、左辺の散乱振幅にはこれらの情報が含まれている。

式 (2) 及び (3) の中の全変位 $q = \{u_i, p\}$ は、それ自体が

散乱体の拡がりや物性値の関数になっている。そのため、散乱体中の物性値を既知、拡がり $\Gamma(x)$ を未知とすると、式 (6) は Γ に関する非線形の方程式となる。これを線形化するために、Born 近似を導入する。すなわち、変位 q が入射波 $q^{(i)}$ と一致するとして、 B 全体を既知であると考え、ここで、式 (6) の両辺に、波の変位方向を示す単位ベクトル d_K をかけて、

$$d_K A_K^{w(s)}(\hat{p}^{(s)}) = \int_D d_K \bar{g}_{KI}^{w(s)}(\hat{p}^{(s)}) \Gamma(x) \bar{B}_I e^{-isw} \hat{p} \cdot x dV(x) \quad (8)$$

と書くことができる。ここで、 $sw\hat{p} = k_{w(i)}\hat{p}^{(s)} - k_{w(i)}\hat{p}^{(i)}$ 、また $k_{w(i)}$ は入射波の波数であり、式 (2) 及び (3) の等価散乱源の変位に入射波を代入したものが $\bar{B} \exp(ik_{w(i)}\hat{p}^{(i)} \cdot x)$ となる。この形に書き改めると、右辺の未知量は散乱体の拡がり $\Gamma(x)$ のみとなる。Born 近似がよく成立するのは、入射波の波長が散乱体よりも長い低周波の領域である。

さらに、式 (8) が Fourier 変換 $F(k) = \int f(x) \exp(-ik \cdot x) dx$ の形をしていることから、逆 Fourier 変換 $f(x) = 1/(2\pi)^3 \int F(k) \exp(ik \cdot x) dk$ を利用して $\Gamma(x)$ を求めることができる。ここでは、波数ベクトル k が複素数であることを考慮して、次式で表す：

$$\Gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \oint_{\Theta} \int_0^{\infty} \frac{d_K A_K^{w(s)}(\hat{p}^{(s)})}{d_K \bar{g}_{KI}^{w(s)}(\hat{p}^{(s)}) \bar{B}_I} \times e^{i\text{Re}(s)\hat{p} \cdot x \omega - \text{Im}(s)|x|\omega} d\omega d\Theta(\hat{p}) \quad (9)$$

従って、各方位・各周波数の散乱振幅 $A_K^{w(s)}(\hat{p}^{(s)})$ を観測すれば、散乱体の拡がり $\Gamma(x)$ を知ることができる。

3. キャビティの形状再構成

3.1 解析モデル

ここでは三次元の定式化を用いて、図-2に示すように、球形及び回転楕円体のキャビティに対し、トランスデューサーとレシーバーが共通となる Pulse-Echo モードで弾性波を送受信する状況を模擬して、数値計算で求めた散乱振幅²⁾を用いて形状再構成を行う。キャビティ内の物性は $(\lambda = \mu = \bar{\rho} = \bar{\alpha} = 1/M = 1/\bar{m} = 0)$ と設定する。この場合、非浸透性の壁面に対応すると考える。受信する波の種類は LS -波（速い縦波）であり、使用する散乱振幅の方位は散乱体の全周であり、周波数はキャビティの代表長 a によって無次元化された波数の範囲で $0.17 < a\text{Re}(k_{LS}) < 1.52$ である。

3.2 再構成の結果

図-3に、流体と固体の連成効果が弱くほぼ弾性と見なせる場合 ($\alpha = 0.21 \simeq \beta$) 及び連成効果が強く流体の圧力が固体の変形に影響を与える場合 ($\alpha = 1.0$) の球形キャビティの再構成像を示す。式 (9) の $\Gamma(x)$ で示す。真の形状は点線で表されている。これにより、連成効果が強い場合も弾性の場合と同様にキャビティ形状が再構成されていることがわかる。また、図-4には連成効果が強い場合 ($\alpha = 1.0$) の回転楕円体（扁平楕円体及び長楕円体）の再構成像を示す。これらの場合も、ほぼ正確に形状が再現されている。

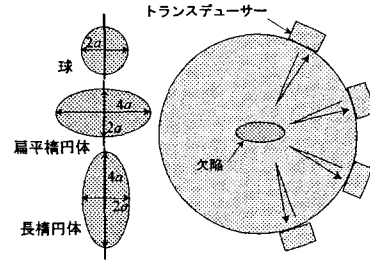


図-2 Pulse-Echo モードでの散乱振幅の計測

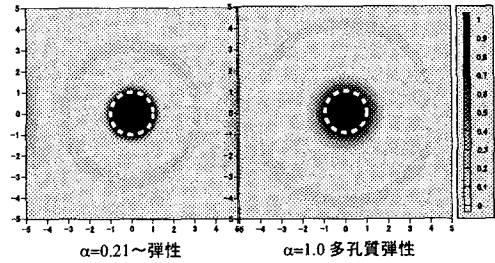


図-3 球形キャビティの再構成像 ($\Gamma(x)$ の分布)

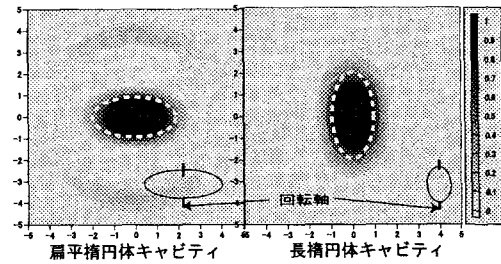


図-4 回転楕円体キャビティの再構成像 ($\Gamma(x)$ の分布)

4. 結論

領域型積分を用いた散乱振幅の表現と Born 近似を用いた形状の再構成が、多孔質弾性体中のキャビティについても実現できることを、数値計算による散乱振幅を用いて示した。この手法では、ここで用いたような比較的狭い周波数レンジの散乱振幅のデータでも、一定の精度で形状を再現できることを示した。

地盤を構成する材料の多くは流体で飽和した多孔質体と見なせることから、本手法は地盤材料中での非破壊検査や地震波による物理探査への応用が考えられる。

参考文献

- 1) Biot, M. A.: Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.28, pp.168-178, 1956.
- 2) Yamamoto, K. and Kitahara, M.: Characterization of scatterers in poroelastic media using far field integral representation, *Proc. 16th Engineering Mechanics Conference*, ASCE, Seattle, Washington, 2003.