

I - 23

ハニカムの変形パターンの分岐シミュレーション

東北大学 学O 成島雄嗣 正 池田清宏
宇都宮大学 正 斉木功

1. はじめに

材料の不安定挙動は、一般的に材料の持つ微視的構造の不安定に起因するものである。ハニカム構造やフォーム材に代表されるセル構造体は比剛性が高く、構造材料としてその挙動が注目されている。セル状周期材料に巨視的一様変形のもとで圧縮荷重を与えるとセル壁、セル辺に微視的座屈が生じ、セル形状は複雑に変化する。特に六角形ハニカムの面内座屈により生じる分岐モードは極めて複雑である。また、微視的座屈は巨視的局所化する場合があり、このとき材料が加速度的に崩壊する恐れがあるので、巨視的局所化に関する力学的挙動を調べることは工学的に重要である¹⁾。

本研究では斉木らの解析法²⁾を用いて正六角形弾塑性ハニカムの等方二軸圧縮による面内座屈解析を行い、座屈モードの変形パターンをSaikiの理論的考察³⁾に基づき調べる事とする。

2. 群論的分岐理論

群論的分岐理論の枠組みを示す。支配方程式は

$$F(u, f) = 0 \quad (1)$$

と表される。ここで u は N 次元ベクトル (N は節点数) であり、 f は分岐パラメータである。主経路上の特異点において特異性条件式

$$J(w_c, f_c)\eta_{ic} = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (2)$$

が成り立つ。ここで J は接線剛性行列、 M は行列の rank であり、特異点 (u_c, f_c) の多重度を意味する。 η_{ic} ($i = 1, \dots, M$) はゼロ固有値に対する固有ベクトルであり、正規直交するようにとる。

ある非線型約合式の対称性を記述するにあたり、鏡映や回転等を表す変換写像 g からなる群 G を考える。ある群 G に不変な構造物は、対称条件として、群 G に関する同変条件式

$$T(g)F(u, f) = F(T(g)u, f) \quad (3)$$

を満足する。ここに $T(g)$ はこの座標変換の仕組を表す表現行列であり、条件式 (3) は、もし (u, f) が非線形約合方程式の解であれば、 $(T(g)u, f)$ も解であることを表す多価性の条件である。ある群 G に同変な系は分岐に伴い対称性を階層的に喪失することが知られている。この種の分岐現象には、群の連鎖構造

$$G \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \dots \quad (4)$$

が対応する。この式は、この系の対称性が G 不変な状態から、 G_1 不変、 G_2 不変と、分岐を次々と起こしながら低下することを表わしている。群 $G, G_1, G_2, \dots$ の分岐の仕組みを逐一調べることにより、群 G に同変な系の分岐階層構造が数値解析に先立ち先験的に求められる。

3. 解析方法・条件

正六角形ハニカムの分岐の仕組みは斉木らによって調べられており⁴⁾、分岐モードは単純分岐では1種類、3重分岐においてはモードI、モードII、flower modeの3種類があることがわかっている（これらの具体形については図3を参照）。また3重分岐点においてモードII、flower modeはモードIの組み合わせにより生成できることがわかっている。

3.1 分岐経路の方向決定

3重分岐点におけるゼロ固有値に対応する任意の固有ベクトルは特異条件式 (2) を満足する3つの直交する固有ベクトル $\eta_{1c}, \eta_{2c}, \eta_{3c}$ を用いて、

$$\eta_c = c_1\eta_{1c} + c_2\eta_{2c} + c_3\eta_{3c} \quad c: \text{係数} \quad (5)$$

と表される。ここで、 c_1, c_2, c_3 は

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \quad (6)$$

を満たす。 (c_1, c_2, c_3) の任意の値に対応する方向に分岐解が存在するのではなく、分岐解に対応する (c_1, c_2, c_3) の値の組は有限個であり、その具体的な組を得ることが分岐解析において重要である。

本研究ではモードIの分岐解を求めるに際し、斉木らの論文で求められているモードIの対称性の条件に着目する。例えばモードIのうち、同じ変形状態のセルが水平方向に並ぶ η_{1a} は図1に示すように3つの節点 α, β, γ の x 方向変位が等しくなるという対称条件を満たす。この条件と式 (6) より η_{1a} の (c_1, c_2, c_3) が求められる。

このようにして求めたモードIの固有ベクトル η_{1a} をそれぞれ $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ 回転させることにより、モードIの他の固有ベクトル η_{1b}, η_{1c} を求めることができる。

このようにして求めたモードIの固有ベクトルを表1の様に組み合わせることによりモードIIとflower modeをつくることができる。モードIIは6種類ある

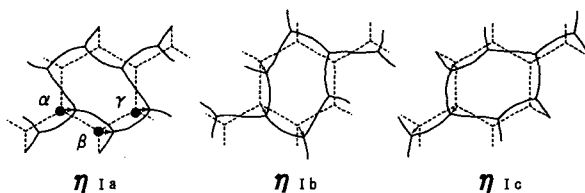


図-1 変形条件例

が、並進や回転により同一視できる物理的に等価なものである。このうち1つだけ求めればよい。flower mode も4種類あるが、物理的に等価なものであり、これも1つだけ求めればよい。

モード I	モード II	flower mode
η_{1a}	$\eta_{1b} \pm \eta_{1c}$	$\eta_{1a} + \eta_{1b} + \eta_{1c}$
η_{1b}	$\eta_{1b} \pm \eta_{1c}$	$\eta_{1a} + \eta_{1b} - \eta_{1c}$
η_{1c}	$\eta_{1a} \pm \eta_{1b}$	$\eta_{1a} - \eta_{1b} + \eta_{1c}$
		$-\eta_{1a} + \eta_{1b} + \eta_{1c}$

表-1 固有ベクトルの組み合わせ⁴⁾

4. 適用例

2×2のセルを周期単位とする96節点、96要素の正六角形弾塑性ハニカム構造に等二軸圧縮負荷による面内座屈解析を行う。

今回は単純分岐点である第2分岐点と3重分岐点である第1分岐点において分岐解析により求めた分岐後の変形モードを図2と図3に示す。3章で提案した手法により分岐経路が容易に求められた。一方、式(5)において c_1, c_2, c_3 を任意に与える手法を用いた場合には、分岐解を体系的に求めることは困難であった。また、この結果、図3に示すようにハニカムの多様な変形パターンを求めることができた。

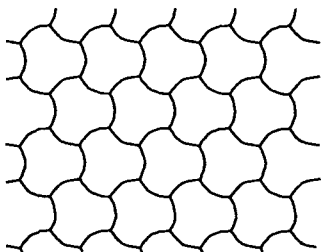
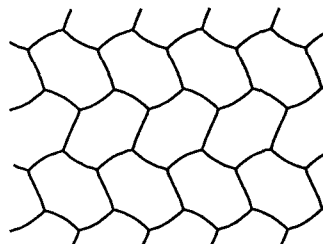
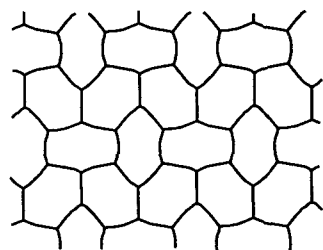


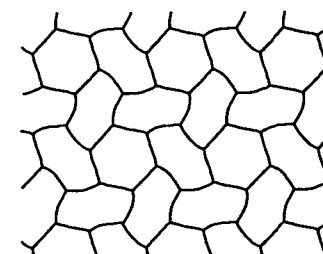
図-2 単純分岐



(a) モード I



(b) モード II



(c) flower mode

図-3 分岐モード

5. 結論

今回の研究では正六角形ハニカムの変形パターンの3重分岐における一例を示した。今後は他の3重分岐点、または多重度をもっと大きい分岐点の変形パターンの状況を調べることで、多段階の分岐あるいは3次元への拡張が今後の課題である。

参考文献

- 1) Gibson, L.J. and Ashby, M.F., [1997] "Cellular solids: Structure and Properties, 2nd ed.", Cambridge University Press.
- 2) 池田清宏・室田一雄, [2001] 構造系の座屈と分岐, コロナ社.
- 3) Ooue, K., Saiki, I., Terada, K. & Nakajima, A. [submitted] "Nonlinear multi-scale modeling with frame elements for cellular materials."
- 4) Saiki, I., Ikeda, K., Murota, K., [2003] "Flower patterns appearing on a honeycomb structure and their bifurcation mechanism." Preprint.