# I − 9　　有限要素法を用いた複合材料構造物の最適化

東北大学工学部　　○学生員　河原　佳武
東北大学大学院工学研究科　　正 員　岩熊　哲夫

## 1.　まえがき

コンクリート等のような複合材料の解析手法として，一般的に，均質化法と森・田中理論とがある．森・田中理論は，回転楕円体の介在物が存在する場合の Eshelby のテンソルを用いて，非均質体を均質体として置き換えることで材料の平均挙動を予測する手法である．この手法は介在物の形状，向き，量を考慮できるため，得られる平均挙動を有限要素に組みむことで，介在物の配合に関する最適化が比較的簡単に行えると考えられる．そこで，本研究では，鋼繊維補強材が含まれるコンクリート橋梁とロックボルトが打設された岩盤を対象として最適化を行うものとする．

## 2.　構成モデル

文献[1]にあるように，森・田中理論によると，等方弾性体中に回転楕円体の介在物がランダムに存在している場合，介在物の体積比率を $f$ とし，弾性係数を $C_{\rm I}$ とすると，複合材料全体の平均弾性テンソルは最終的に，

$$\bar{C} = C_{\rm M}\left\{C_{\rm M} - (1-f)\,(C_{\rm M} - C_{\rm I})\,S\right\}^{-1}\left[C_{\rm M} - (C_{\rm M} - C_{\rm I})\right]\left\{S - f\,(S - I)\right\} \quad \cdots\cdots (1)$$

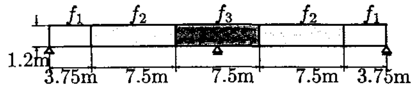
と求まる．$C_{\rm M}$ は母材の弾性係数，$S$ は母材のポアソン比と介在物の半径比とその向きで決まる Eshelby のテンソル[2]である．本研究では，平面ひずみ問題としてこの平均挙動を定ひずみ三角形要素に組み込んだ有限要素法[3]を用いて解析を行った．

## 3.　解析結果

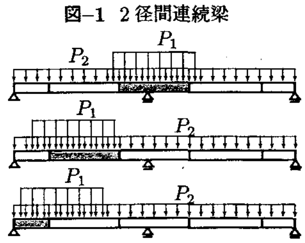
### (1)　2径間連続梁

鋼繊維補強材が含まれる橋梁を施工する際に，補強材を一様な体積比率で混入すると，必要以上の補強が行われる部分が存在することになり不経済である．同じ介在物使用量でも，その体積比率をいくつかのブロックごとに指定し，「最適」な分布をさせることは可能であろう．ここでは，複数のブロックが同時に降伏に達するような介在物の分布を最適解として解析を行った．

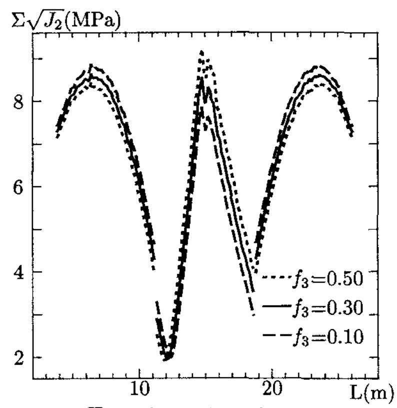
**図–1** のような各スパンが 15m，桁高が 1.2m の2径間連続梁を 8層200列の6400要素にメッシュ分割し解析を行った．介在物は半径比 1:50 の $x_3$ 軸方向に無限に長い楕円柱とし，両端，スパン中央部，中央ヒンジ部分でそれぞれ $f_1$，$f_2$，$f_3$ と設定した．材料定数は，コンクリート，鋼繊維のヤング率，ポアソン比をそれぞれ $E_{\rm M} = 45$ GPa, $\nu_{\rm M} = 0.3$, $E_{\rm I} = 200$ GPa, $\nu_{\rm I} = 0.2$ とする．**図–2** のように $p_1 = 4.0$ MPa, $p_2 = 2.0$ MPa の L 荷重をそれぞれの断面で影響線載荷し，要素の各列 32 要素の $\sqrt{J_2}$ の総和 $\Sigma\sqrt{J_2}$ をプロットした．$f_1 = 0.005$, $f_2 = 0.200$ として $f_3$ だけを変化させたものが**図–3** である．$f_3 = 0.100$ のとき $f_3$ 部分に比べて $f_2$ 部分の応力が大きくなっている．$f_3$ が増加すると介在物が新たに応力を受け持ってくれるために $f_3$ 部分の $\Sigma\sqrt{J_2}$ は増加する．逆に，$f_2$ 部分では $\Sigma\sqrt{J_2}$ が減少し，それぞれの極値は $f_3$ を増加に従い近づいていく．$f_3 = 0.300$ のときに $f_2$ 部分と $f_3$ 部分の極値がほぼ重なっている．すなわち，この梁は L = 14.8m，L = 6.4m の断面で同時に降伏するような意味で補強の最適化ができたと考えられる．




**図–1**　2径間連続梁



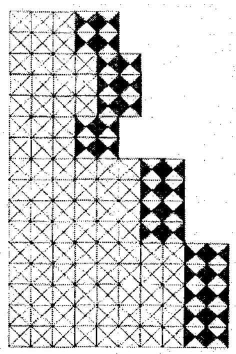

**図–2**　載荷条件




**図–3**　$f_1 = 0.005$, $f_2 = 0.20$

### (2) ロックボルトが打設された岩盤

ロックボルトが打設された岩盤も一種の複合材料とみなすことができる．図–4 のようにメッシュ分割した高さ 8m の岩盤にロックボルトを打設した場合を考える．図–4 で黒く塗りつぶされた要素にロックボルトを想定した半径比 1：30，$E_{\mathrm{I}} = 200$ GPa, $\nu_{\mathrm{I}} = 0.3$ の介在物を各ブロックごとに上から $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$, $f_5$ の体積比率で全て水平に入れ，その他の要素にはクラックを想定した半径比 1：50，$E_{\mathrm{I}} = 0$ GPa, $\nu_{\mathrm{I}} = 0.5$ の介在物が垂直に 1% ずつ入っているものとした．また，岩盤の材料定数，降伏応力は文献[4]より引用した．岩盤の上面に 15 kN の等分布荷重を載荷し，各接点に岩盤の自重をかけたときに，ロックボルトが打設された要素の一番外側の 1 要素について $\frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_Y}$ を求めた．ここで $\sigma_Y$ は平均の降伏応力であり，岩盤の降伏応力を $\sigma_Y^M$，ロックボルトの降伏応力を $\sigma_Y^I$ としたとき，$\sigma_Y = (1-f)\sigma_Y^M + f\sigma_Y^I$ である．この $\frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_Y}$ を危険度とし，最小化することを目的関数とした最適化を試みた．

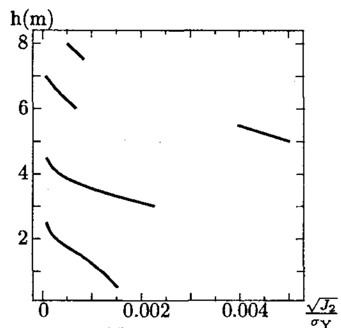


図–4 メッシュ図

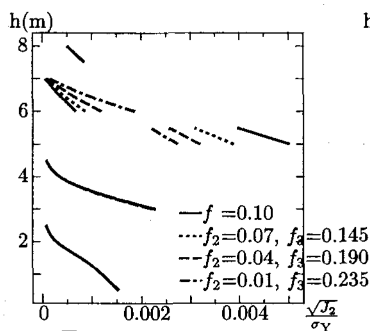
$f = 0.10$ として均等にロックボルトを打設した場合の各打設位置の $\frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_Y}$ を図–5 に示す．このとき，体積比率 $f_3$ のくぼんだ部分で危険度が高くなっている．ただし，ロックボルトの総使用量を変えずに，

$$2f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 5f_5 = \text{const.} \qquad (2)$$

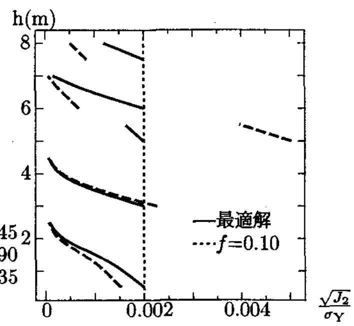
という制約条件のもとでの最適解を求める．例えば，図–6 のように，危険度が低い箇所から危険度の高い箇所へロックボルトを移すことで，危険度が均等化するように探査していく．その結果，$f_1 = 0.01655$, $f_2 = 0.0072$, $f_3 = 0.36245$, $f_4 = 0.1231$, $f_5 = 0.0656$ のとき，図–7 のように危険度のばらつきの誤差は 0.026% となり，ほぼ均等化することできた．また，$f_3$ 部分の危険度については約 61% 軽減することができた．




図–5 $f = 0.10$




図–6 $f_1 = f_4 = f_5 = 0.10$




図–7 最適解

## 4. 終わりに

複合材料の解析を行う際に，森・田中理論を用いる最大の長所は，Eshelby のテンソル利用することで介在物の形状，向き，体積比率を表現でき，比較的簡単に計算できることにある．本研究は，連続梁とロックボルトの打設について最適化を行おうとしたものであるが，連続梁では，現実的な値から若干離れてはいるが，降伏に関して最適化することができたといえるだろう．また，ロックボルトの打設パターンについても，使用本数に制約をつけたなかで，危険度が最も高い部分に多くボルトを配置し，全体の危険度分布を均等にすることができた．力学的に明らかな結果ではあるが，設計段階での簡便な最適手法として用いる可能性を示すことができた．

### 参考文献

1) 岩熊哲夫，堀宗朗，森勉，村外志夫：複合材料の平均的な硬化係数と遠征の評価，構造工学論文集，vol37A, pp.435-442,1991.
2) Eshelby, J. D: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*,Vol21, pp571-574,1973.
3) 樋口耕平，岩熊哲夫，京谷孝史，寺田賢二郎：解析的手法を用いた複合材料平面ひずみ有限要素，応用力学論文集 Vo6, pp107-116,2003.
4) 京谷孝史，谷宗行：均質化法を応用したロックボルト打設間隔の最適化，応用力学論文集 Vol6, pp159-166,2003.