Ｉ－３　有限被覆法による異方性材料の破壊挙動の解析

○東北大学　学生員　本間茂樹
東北大学大学院　正　員　寺田賢二郎
東北大学大学院　学生員　石井建樹
東北大学大学院　学生員　車谷麻緒

1. はじめに

固体力学において，割れや損傷の現象をいかにして的確にモデリングするかという問題は大きな関心を集め続けており，近年の著しい計算技術の進化をうけながらここ数十年著しい発展を続けてきた．1990年代後半に出現したメッシュレス法の代表的なものに Generalized FEM（GFEM），eXtended finite method（X-FEM）などがあるが，Shi[1] による Manifold Method（MM）にも注目したい．MM は X-FEM 同様 Partition of Unity 条件に基づいた一般化有限要素法である．また MM の近似概念を継承し，メッシュフリー的な側面を押し出した Finit Cover Method（有限被覆法 : FCM）は，近似関数が定義される数学被覆と物理領域を独立に扱うことで複雑な解析対象を定形なメッシュで解析可能にした．これまでに浅井ら [2] による強不連続性を含む解析，車谷ら [3] による非均質弾性体等の解析などが行われているが，本研究では変形特性や不連続面進展に異方性を示す材料に適用できるよう拡張する．

2. 有限被覆法

FCM では，解析対象を「近似関数が定義される数学的な部分領域（数学被覆）」と「支配方程式が満たされるべき物理的な部分領域（物理被覆）」を分離している点が FEM とは異なる（図-1 参照）．各数学被覆 i に関して，被覆変位関数 $f_i(x,y)$ と重み関数 $w_i(x,y)$ が定義され，重み関数は定義域においてのみある値を持つ関数で，数学被覆同士の共通領域である数学要素において次の条件（Partition of Unity）を満たす．

$$\sum_{x,y\in \mathrm{M}_i} w_i(x,y)=1$$

被覆変位関数を各被覆について定義し，重み付き和として重ね合わせることで全体変位関数を次式のように近似する．

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{k} w_i(x,y)f_i(x,y)$$

ここに k は総被覆数である．

3. 異方性材料

本研究では，異方性材料の中でも弾性対称面が直角に存在する平面問題における直交異方性に特化して考える．

直交異方性の材料主軸系における弾性定数マトリクスは次のように書ける．

$$D'=\begin{bmatrix}\dfrac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & \dfrac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} & 0\\ \dfrac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} & \dfrac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & 0\\ 0 & 0 & G_{12}\end{bmatrix}$$

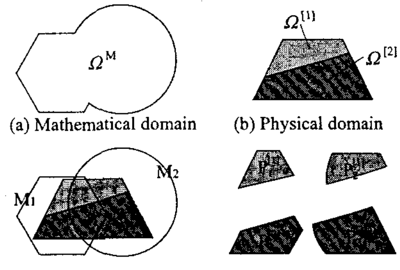


図-1 数学被覆と物理被覆

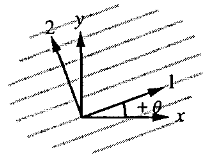


図-2 材料主軸からの変換

ここに

$$\Delta=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3}$$

である．

また，図-2 のように材料主軸が解析を行う xy 座標系から θ 回転して得られるとすると xy 座標系における弾性定数マトリクスは座標変換マトリクス $\boldsymbol{T}$ を用いて

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

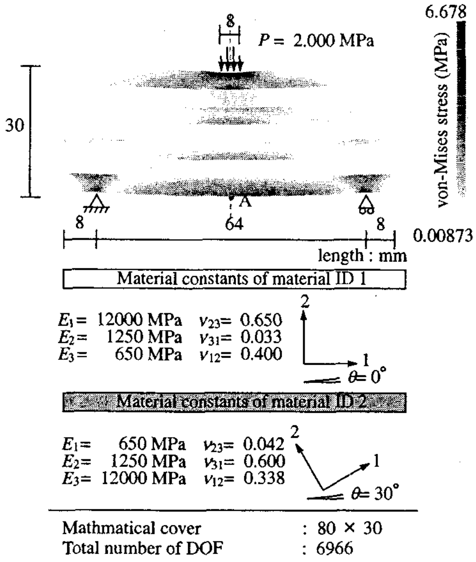
と表すことができる．これを要素剛性行列に組み込むことで異方性をモデル化する．

4. 数値解析例

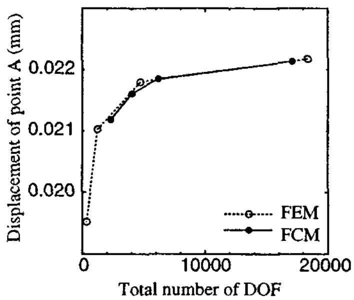
以下に異方性材料を仮定した解析例を示す．

4.1 弾性変形解析例

まず，図-3 のような材料 1 が材料 2 をはさむよう交互に計 7 層重なっている積層材の 3 点曲げ問題を考える．材料定数，境界条件等は同図のとおりであり，それぞれの材料は共にアカマツを想定している．ただし積層構造による変形への影響等は考慮せず，変形特性にのみ異方性を有する均質材料を仮定している．



図–3 積層材の 3 点曲げ



図–4 FCM と FEM との比較

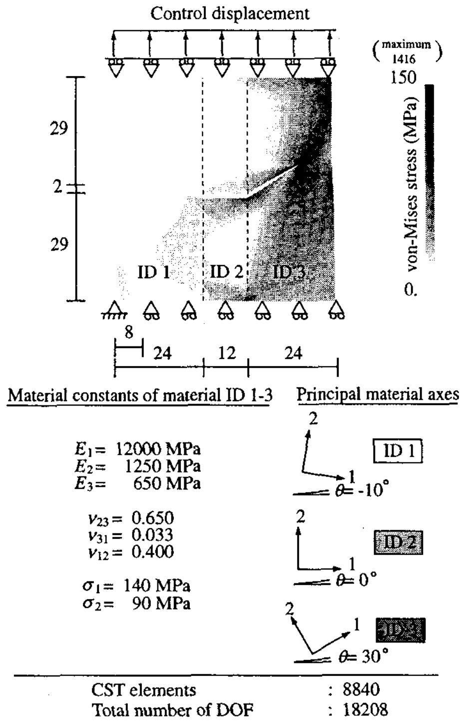
このモデルを自由度を変えて計 4 例行い，また FEM においても同様なモデルを 4 つの自由度ごとに数値解析した．なお，FCM では矩形の定形のメッシュを，FEM においてはアイソパラメトリック要素を有限要素解析に用いている．

各自由度に対するモデル中央最下部の A 点の鉛直下向き変位を表したものを図–4 に示す．これを見ると FCM の結果は FEM の結果にほぼ一致していると言え，FCM による数値解析が有効であることが示された．

4.2 不連続面を有する解析例

強度特性に異方性を示す材料の不連続面進展解析を行う．図–5 のようにノッチを有する矩形モデルに強制変位を与える．解析には三角形一般化要素を用いている．

モデルの材料主軸はノッチを有する辺からその対にある辺に向かうにしたがって変化しているものとし，その傾きはノッチ側から順に $-10°, 0°, 30°$ である また，本研究にお



図–5 ノッチを有するモデル

ける不連続面の発生規準は，各要素について材料主軸方向に作用する引張り応力がその方向ごとに設定された引張り強度 σ_1, σ_2 に達した場合に発生するものとし，引っ張り強度に達した方向に垂直な面において不連続面が進展する．

ノッチのコーナー部から発生した不連続面は材料主軸の傾きに沿って方向を変化させながら進展していることがわかり，強度特性の異方性をよく表している．

5. 結論

本研究では有限被覆法を用いた解析において変形特性，強度特性の異方性の表現を可能にした．しかし異方性材料を構成している微視的構造や積層間の影響を考慮するにはいたっていない．また，実際の異方性材料をより正確にモデリングするためには，木質系材料における繊維の方向等をどのように指定していくかについても考える必要があり，不連続面の発生については，その発生規準等を更に考慮する余地がある．

参考文献

1) Shi, G. H.: Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing, Report*, No. 92-1, U.S. Army Reserch Office, 1991.
2) 浅井光輝, 寺田賢二郎：有限被覆法による不連続面進展解析, 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 193-200, 2003.
3) 車谷麻緒, 浅井光輝, 寺田賢二郎：有限被覆法の弾塑性問題への適応とその性能評価, 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 247-256, 2003.