Ⅲ－25　均質化法に基づく最適ロックボルト打設間隔決定法とその応用

東北大学　学生員　○谷　宗行
東北大学　正会員　京谷　孝史
東北大学　学生員　平出　壮司

1. はじめに

岩盤構造物の補強工としてロックボルトは主要な構造部材として用いられているが，経験・実績に基づいた設計が行われており，客観性に基づいた設計となっていない．一方，構造最適設計の分野では，均質化法を応用して連続体構造物のトポロジーを決定する最適化手法が定式化[1]されて以来，様々な問題へ拡張されている．本研究ではロックボルトの打設による岩盤の補強設計をロックボルトの最適配置問題とみなし，トポロジー最適設計手法を用いて最適な配置を求める方法を提案する．岩盤斜面モデルに対しロックボルトの使用量が限られているときの最適なロックボルトの打設間隔の評価を試みる．本研究では設計変数として打設間隔 p (単位：m) だけを扱う．解析における外力はすべて自重のみである．

2. 均質化弾性係数と破壊危険度関数の作成

まず均質化法に基づき，後の最適化解析において用いる均質化弾性係数 E_{ijkl} と，破壊危険度(破壊に対する近さを表す指標)関数をあらかじめ設計変数の関数として決定する．均質化法は微視的周期構造(ユニットセル)を有する材料の平均物性を求める手法であり，これを用いれば図-1のようなボルトを打設した岩盤を近似したユニットセルから数学的に厳密に均質化弾性係数 E_{ijkl} を求めたり，数値試験によって巨視的破壊基準を定めることができる[2]．図-1のユニットセルに対して，打設間隔が広くなるほど剛性が下がる均質化弾性係数 E_{ijkl} が得られた．巨視的破壊基準は次のような3次元二次曲面楕円体として得られる(本研究では平面ひずみ問題を扱う)．

$$\{\sigma\}^t[A']\{\sigma\}+\{b'\}^t\{\sigma\}=1 \tag{1}$$

ただし $\{\sigma\}=\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^t$ である．この左辺の関数を，値が1になれば破壊を表す破壊危険度関数とするのが自然のようだが，この左辺の最小値は必ずしも0ではなく，負の値もとりうるので少々都合が悪い．$[A']$ は確かに正定値行列であるが，$\{b'\}^t$ の項による楕円体の平行移動分が影響するためである．そこで破壊危険度を0～1で評価するために，式(1)の左辺に $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{x}_0$ のように平行移動を施すことにより

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{\sigma},p)&=\{y\}^t[A''(p)]\{y\}\\&=\{\sigma-x_0\}^t[A''(p)]\{\sigma-x_0\}\end{aligned} \tag{2}$$

を破壊危険度関数として定義する．これは常に $\partial G(p)/\partial p>0$，すなわち打設間隔 p が広くなるほど高い破壊危険度を与える指標となっている．のちの解析では $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$ とした．例として，$p=1.5\,(m)$ の時

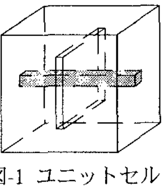

図-1 ユニットセル

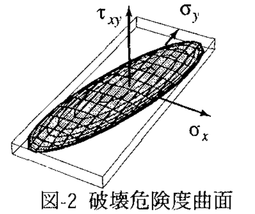

図-2 破壊危険度曲面

の破壊危険度曲面 $G(\boldsymbol{\sigma},1.5)=1$ を図-2に示す．

3. 外力による仕事量を最小とするボルトの配置問題

まず使用するロックボルトの本数に次のように制約を設ける．ロックボルトを施工する構造物の高さを L(m)，全打設間隔の平均を p_{av}(m)とすれば，ロックボルトの総使用本数は L/p_{av} と表すことができるので，制約条件は $\int_L \frac{1}{p}dl \le \frac{L}{p_{av}}$ となる．さらにロックボルトの総施工対象領域 Ω を用いて書くと $\int_\Omega \frac{1}{p}d\Omega \le \frac{\Omega}{p_{av}}$ となる．ロックボルトは一般に $0.5m$～$2.5m$ の間で打設されるため，打設間隔にも上下限の制約を設けた．ゆえに外力による仕事量 $l(\boldsymbol{u})$ の最小化問題は次のように書ける．

問題1　目的関数：$l(\boldsymbol{u}) \quad \rightarrow \quad$ 最小

$$\text{制約条件：}\int_\Omega \frac{1}{p(\boldsymbol{x})}d\Omega-\frac{\Omega}{p^{av}}\le 0$$

$$0.5-p(\boldsymbol{x})\le 0,\quad p(\boldsymbol{x})-2.5\le 0$$

さらにこれは，設計変数に関する全ポテンシャルエネルギーの最大化にかわる．この制約条件付きの全ポテンシャルエネルギー最大化問題を解くために未定乗数 $\Lambda,\lambda_0,\lambda_1$ を導入し，次のラグランジュ関数を定義する．

$$\begin{aligned}L(p)=\Pi(\boldsymbol{u})-\Lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{p(\boldsymbol{x})}d\Omega-\frac{\Omega}{p^{av}}\right]\\-\lambda_0(\boldsymbol{x})\cdot(0.5-p(\boldsymbol{x}))-\lambda_1(\boldsymbol{x})\cdot(p(\boldsymbol{x})-2.5)\end{aligned} \tag{3}$$

ここで $\Pi(\boldsymbol{u})$ は系の全ポテンシャルエネルギーである．各要素のボルト間隔 p に関する L の停留条件(Kuhn-Tucker条件)を満たすように最適性規準法[3]によって反復計算をする．岩盤斜面モデルの表層4層に均等に1.5(m)で打設した状態から最適化を行った最終解析結果が図-3，目的関数値の変化が図-4である．

4. 破壊危険度に着目したボルトの配置問題

先に求めた均質化弾性係数と破壊危険度関数に着目し，破壊に関してより安全となるようなロックボルトの配置問題を考える．

(1) 斜面の総破壊危険度を最小とするボルトの配置

対象領域における破壊危険度の総和 $\int_\Omega G(\boldsymbol{\sigma},p)d\Omega$

を最小にすることによって安全な位相を探すことを考える．仮に一カ所の危険度が大きくても総和が小さければ良いという判断であり，場合によっては工学的に容認できない結果が得られることもあり得る．

問題2 目的関数：$z(p)=\int_{\Omega} G(\boldsymbol{\sigma},p)d\Omega \quad \rightarrow$ 最小

制約条件：$\displaystyle\int_{\Omega}\frac{1}{p(\boldsymbol{x})}d\Omega-\frac{\Omega}{p^{av}}\leq 0$

$0.5-p(\boldsymbol{x})\leq 0,\quad p(\boldsymbol{x})-2.5\leq 0$

この制約条件付きの最小化問題に対してラグランジュ関数を次のように定義する．

$$L(p)=\int_{\Omega}G(\boldsymbol{\sigma},p)d\Omega+\Lambda\left[\int_{\Omega}\frac{1}{p(\boldsymbol{x})}d\Omega-\frac{\Omega}{p^{av}}\right] \tag{4}$$
$$+\lambda_0(\boldsymbol{x})\cdot(0.5-p(\boldsymbol{x}))+\lambda_1(\boldsymbol{x})\cdot(p(\boldsymbol{x})-2.5)$$

$\Lambda,\lambda_0,\lambda_1$はラグランジュ乗数である．**問題1**と同様に，pに関するLの停留条件を満たす解を最適性規準法によって計算した結果，最適打設配置図が図-5のように得られた．目的関数値の変化が図-6である．

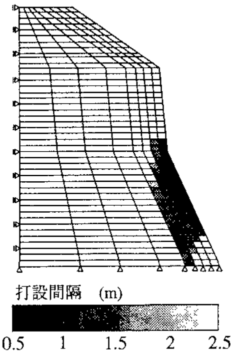

図-3 最適打設配置図

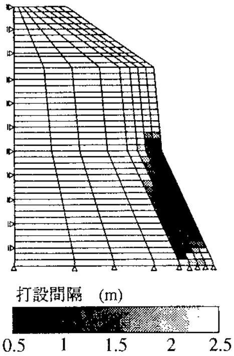

図-5 最適打設配置図

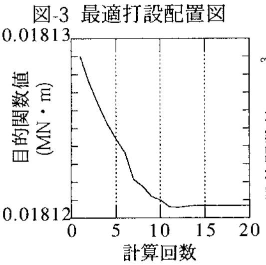

図-4 目的関数値の変化

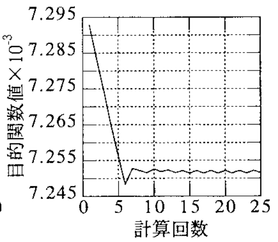

図-6 目的関数値の変化

(2) 破壊危険度分布を平滑にするボルトの配置

問題2では危険度の総和には反映しにくい局所的な応力集中を受ける箇所には必ずしもロックボルトが集中しない可能性がある．しかし，工学的見地からはそうした局所的に危険度が高い箇所こそ，破壊を誘因し補強すべき部分である．そこで本節では岩盤斜面上に破壊危険度の分布曲面を考え，それを出来るだけ平坦にすることを考える．すなわち$\int_{\Omega}\left[\nabla^2 G(\boldsymbol{\sigma},p)\right]^2 d\Omega$を小さくすることを考える．

問題3 目的関数：$z(p)=\int_{\Omega}\left[\nabla^2 G(\boldsymbol{\sigma},p)\right]^2 d\Omega \rightarrow$ 最小

制約条件：$\displaystyle\int_{\Omega}\frac{1}{p(\boldsymbol{x})}d\Omega-\frac{\Omega}{p^{av}}\leq 0$

$0.5-p(\boldsymbol{x})\leq 0,\quad p(\boldsymbol{x})-2.5\leq 0$

ラグランジュ関数を次のように定義する．

$$L(p)=\int_{\Omega}\left[\nabla^2 G(\boldsymbol{\sigma},p)\right]^2 d\Omega+\Lambda\left[\int_{\Omega}\frac{1}{p(\boldsymbol{x})}d\Omega-\frac{\Omega}{p^{av}}\right] \tag{5}$$
$$+\lambda_0(\boldsymbol{x})\cdot(0.5-p(\boldsymbol{x}))+\lambda_1(\boldsymbol{x})\cdot(p(\boldsymbol{x})-2.5)$$

危険度分布上のある点における$\nabla^2 G$の求め方を説明する．今の場合，有限要素法を用いており要素内のガウス点における$G(\boldsymbol{\sigma},p)$の値が得られるのみである．そこで$\nabla^2 G$を求めるために，着目した点から半径rの円内に含まれる周辺の点を用いて，最小二乗法により二次曲面近似を行う．すなわち

$$G=\begin{Bmatrix}x & y\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}b_1 & b_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}-c \tag{6}$$

のように近似する．着目した点におけるラプラシアンは近似した二次曲面の式から$\nabla^2 G=2\left(A_{11}+A_{22}\right)$として求まる．

式(5)のpによる停留値を求めることにより，最適打設配置を図-7のように得た．近似半径ごとの目的関数値の変化が図-8である．外力は自重のみである．

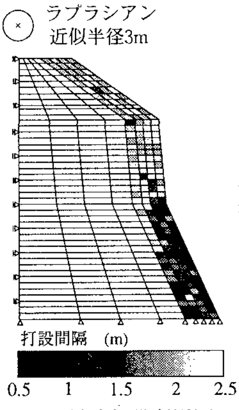

図-7 最適打設配置図

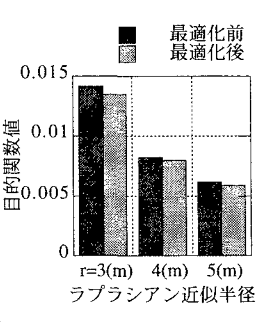

図-8 目的関数値の変化

5. おわりに

ロックボルトが均等打設された岩盤斜面モデルに対して，3つの目的(外力による仕事量，斜面の総破壊危険度，破壊危険度分布の凹凸)の最小化を目指すことにより，限られたロックボルト使用本数の範囲内で，それぞれの目的に合った位相構造を得ることができた．

参考文献

1) M.P.Bendsøe ,N.Kikuchi : Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, Comp Meth Appl Mech Engng. pp197-224,1988

2) 欧陽立珠：均質化法と極限支持力解析を用いた不連続性岩盤安定解析システムの開発，東北大学修士論文，1998

3) M.P.Bendsøe, A.Diaz and N.Kikuchi : Topology and generalized layout optimization of elastic structures , Topology Design of Structures . pp159-205,1993