Ⅲ－22　修正応力を利用した異方硬化の表現

東北学院大学工学部　学生会員　○藤井　伸晃
東北学院大学工学部　学生会員　金原　瑞男
東北学院大学工学部　学生会員　庄子　日路見
東北学院大学工学部　正会員　山口　晶
東北学院大学工学部　正会員　飛田　善雄

1．はじめに

弾塑性構成モデルでは，塑性変形履歴の影響は硬化特性として表現される．実験結果より，応力状態を表す降伏曲面は，初期異方性，または後続の負荷履歴の影響により異方的硬化を示し，形状変化や回転も伴う複雑な挙動を示すことが知られている．

降伏曲面の変化は，材料の内部構造の変化に起因する現象である．そこで，内部構造を反映するような修正応力を考え，修正応力空間と応力空間の写像（変換）を考察する．修正応力空間では簡単な等方体の関係式(von Mises や Hooke の等方弾性体)を利用する．この関数や関係を応力空間上に戻すと，応力空間上で降伏曲面の様々な変化を描き出すことができる．この簡便な方法を修正応力法と呼ぶことにする．

本研究では，修正応力法を用いて統一的な観点から，異方性を考慮した弾塑性挙動を定式化することの可能性の検討を目的としている．

2．変換マトリックスの数学的性質

修正応力 $\mathbf{T}$ と応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の関係は線形変換として，等方関数の表示定理および等長変換を用いて，マトリックス表現すれば，次式で表現される．

$$\{\mathbf{T}\}=[\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\sigma}\}$$

ここに，$[\mathbf{H}]$ は構造テンソルによって決められる変換マトリックスである．変換マトリックスの性質は，極分解を利用することにより理解できる[1)]．極分解は任意正方マトリックスを変形，回転に分解できる．降伏曲面が見かけ上回転していても，極分解により回転が現れなければ，その変換マトリックスは，数学的には単に変形のみの操作を行っていることになる．このように，数学的に厳密な議論が可能となる．

3．修正応力による金属材料の複雑な降伏条件の検討

金属の異方硬化則は過去にもいくつか提案されてきた．本研究では修正応力を用いて異方性の表現を試みるとともに既存の異方性硬化則[2)]と比較した．

金属の降伏条件は拘束圧に依存しないことが知られている．そのため修正応力も，拘束圧は拘束圧へ，偏差応力は偏差応力へ変換される必要がある．

この条件を満足する一般的表現は，表示定理による一般形に制約条件が加えられ，次式のように表現される．

$$\begin{aligned} T_{ij} &= A_{ijkl}\sigma_{kl} \\ A_{ijkl} &= \alpha\,\delta_{ij}\delta_{kl}+\beta\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)+\gamma\,\mathrm{H}^D_{ij}\mathrm{H}^D_{kl} \end{aligned} \tag{1}$$

(1) 式を偏差応力のみで考えると次式のようになる．

$$s^*_{ij}=\left[\beta\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)+\gamma\,\mathrm{H}^D_{ij}\mathrm{H}^D_{kl}\right]s_{kl} \tag{2}$$

修正応力空間における距離として降伏条件を与えると降伏条件は，von Mises と同様で次式となる．

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{s}^*\right\| = k &\Leftrightarrow s^*_{ij}s^*_{ij}-k^2=0 \\ s^*_{ij}s^*_{ij} &= A_{ijkl}s^*_{kl}A_{ijpq}s^*_{pq}-k^2 \\ &= C_{ijkl}s^*_{ij}s^*_{kl}-k^2=0 \end{aligned} \tag{3}$$

このとき，変換マトリックスは次式で与えられる．

$$\begin{aligned} C^*_{ijkl} &= 2\beta\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) \\ &+\left(4\gamma\,\beta+\gamma^2 tr\left(\left(\mathbf{H}^D\right)^2\right)\right)H^D_{ij}H^D_{kl} \end{aligned} \tag{4}$$

Baltov と Sawczuck(1969)による異方性硬化則を取り上げる．偏差応力を作用させた場合の，変形，回転を表現する係数マトリックスは以下の通りとなる．

$$\begin{aligned} H_{ijkl} &= \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) \\ &+\left(A_0+A_1I_{2s}+B_1I_{3s}+A_2I^2_{2s}+\cdots\right)\varepsilon^p_{ij}\varepsilon^p_{kl} \end{aligned} \tag{5}$$

式(5)は，式(4)の変換マトリックスに $\beta=1/2$，$\mathbf{H}^D=\boldsymbol{\varepsilon}^p$，$\gamma=a_0+a_1I^\varepsilon_2+a_2I^\varepsilon_3$ を代入したものに等しいことがわかる．その他の著名な異方性硬化則も，式(4)の変換則により表現できることが証明できた．

4．修正 Cam-clay モデルにおける回転硬化[3)]

地盤材料の初期異方性の影響を考慮するために，関口・太田は初期異方性を表現する変数として，圧密状態の応力に基づき，式(6)の量を定めた．

$$\beta_{ij}=\left(s_{ij}/p\right)_0 \tag{6}$$

異方性を表現する弾塑性モデルを定式化するにあたって，式(6)に示す内部変数を利用している．橋口は，修正 Cam-clay モデルを等方体については次の形で表現した．

$$\begin{aligned} f(p,\chi) &= p\left(1+\chi^2\right)=C \\ \chi &= \left\|\eta_{ij}\right\|/m \end{aligned} \tag{7}$$

この等方モデルに異方性を導入するため，次の操作を行った．

$$\hat{\eta}_{ij}=\eta_{ij}-\beta_{ij} \tag{8}$$

関口・太田および橋口は，式(8)で定義される応力比を利用することにより，異方的硬化を表現し，橋口はこれを回転硬化モデルと呼んでいる．

修正応力の観点から，これらの定式化を検討すると，次式で定義される修正応力を用いた場合に相当する．

$$T_{ij}=\left[\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)-\frac{1}{2}\beta_{ij}\delta_{kl}\right]\sigma_{kl} \tag{9}$$

議論を簡潔にするため，(p,q) 2次元空間で式(9)を考えると次の変換式が得られる．

$$\begin{Bmatrix} p^* \\ q^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} \tag{10}$$

この式による変換を図示したものが，図 1 である．細い線が等方体の降伏曲面で，太い線が初期異方性を考慮した降伏曲面である．

同じく関口らによる構成モデルを (p,q) 2 次元空間で描いたものが，図 2 である．両者を比較すると，全く同じ変換であることが理解できる．

回転硬化モデルが，どのような意味をもっているのかを議論するため式（10）の変換マトリクスを極分解すると次の結果が得られる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{4+\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}} & \frac{2}{\sqrt{4+\beta^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2+\beta^2}{\sqrt{4+\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}} & \frac{2}{\sqrt{4+\beta^2}} \end{bmatrix} \tag{11}$$

右辺の最初の項が回転を第 2 項が変形を表現する．式（11）の形状変化を表すマトリクスのみを乗じた変換の結果が図 1 の点線で描かれた楕円である．
これらの結果を考察すると，回転のようにみえる変換の大部分が形状変化によってもたらされていることが理解できる．

5．地盤材料の弾性的応力・ひずみ関係

本章の目的は，地盤の堆積状態によってもたらされる初期異方性を導入することにある．構造テンソルを導入した．修正応力空間では等方弾性体と仮定して，次のような修正応力を定めた(Tobita and Yanagisawa)．

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}A_{kj}\right) \tag{12}$$

ここで，初期異方性を表す構造テンソルを $\mathbf{A}$ とした．式（12）による変換の結果として与えられる応力とひずみ関係をマトリクスの形で表すと次式になる．

$$\begin{Bmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \\ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \mathbf{A}^{-1} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \\ \end{Bmatrix} \tag{13}$$

議論を簡単にするために，2 次元応力状態に対して，(p,q_1,q_2)，(v,γ_1,γ_2) という応力表現を用いて，2 次元空間で表したものが，図 3 である．縦軸には偏差ひずみの大きさ $\|\gamma\|$，および偏差応力の大きさ $\|q\|$ の値をとり，横軸には体積ひずみ v，および拘束圧 p の値をとっている．ここに

$p = (\sigma_{11}+\sigma_{22})/2$，$q_1 = (\sigma_{11}-\sigma_{22})/2$，$q_2 = \sigma_{12}$，

$v = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}$，$\gamma_1 = \varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}$，$\gamma_2 = 2\varepsilon_{12}$ と定義している．このような定義を採用することにより，応答を特殊な 2 次元座標として表現できることになる．

図―3 は，γ_1 のみを作用させた時の，初期異方性を考慮した異方弾性体の応答を示している．主ひずみ差を与えた時に，拘束圧 p も応答している．明らかに異方的弾性体の特徴を表現している．

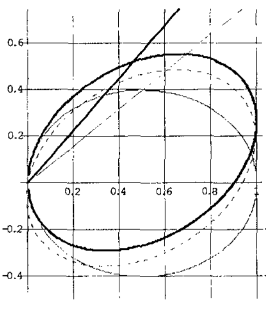

図 1.修正応力による修正 Cam-clay モデル

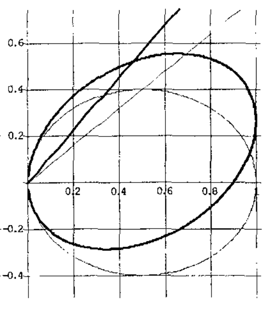

図 2.応力比による修正 Cam-clay モデル

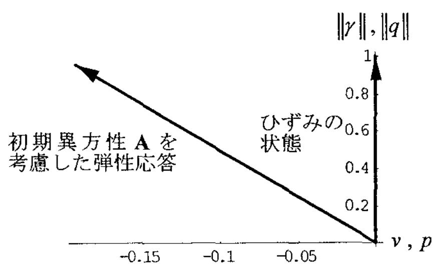

図 3．2 次元応力状態における弾性応答

6．まとめ

本報告では次の結論が得られた．

以下の工学材料の弾塑性挙動を，修正応力を用いた方法により異方性の影響を統一的な方法で表現することができた．

・既存の金属材料の異方性硬化則を表現できた．

・修正 Cam-clay モデルを修正応力法により表現し，極分解により変形と回転部分に分解し，考察できた．

・初期異方性を含む弾性的な応力ひずみ関係を表現できた．

参考文献)

1) 田村武：連続体力学の基礎，朝倉書店，2000.

2) 石川博将：固体の非線形力学，養賢堂，2000.

3) 堤成一郎，橋口公一他 3 名：応用力学論文集 Vol. 5, pp. 401-409 (2002 年 8 月).

4) Y. Tobita, E. Yanagisawa : Soil and foundations Vol. 32, No. 1, 85-99, Mar. 1992.