

II-95

転波列の波長に関する研究

東北大学大学院 学生員 ○五十嵐 章

東北大学大学院 正 員 泉 典洋

1. はじめに

急勾配斜面の流れには転波列と呼ばれる波列が形成されることが知られており、これまでに数多くの研究が行われている。それらの研究により、十分発達した転波列はフルード数と波長を与えると完全に記述できることがわかっているが、波長は理論的に求められていない。本研究では準定常転波列(一定の形状を維持しながら流下する転波列)の波長を求めることを目的としている。準定常転波列の上流端を固定し、下流端を微小量変化させることで波長に摂動を与えて線形安定解析を行った。

2. 線形安定解析

2.1 定式化

傾斜角 θ の斜面上の流れは St. Venant の浅水流方程式を用いて次のように表される。

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma - \frac{(c-V)^2}{h} \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial Vh}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

上式ではすでに次式のような座標変換および無次元化が行われている。

$$\tilde{x}^* = \tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t} \quad (3)$$

$$\tilde{t} = \left(\frac{\tilde{H}_c / C_f}{\tilde{V}_c} \right) t, \quad \tilde{x} = \left(\tilde{H}_c / C_f \right) x \quad (4a, 4b)$$

$$(\tilde{V}, \tilde{c}) = \tilde{V}_c(V, c), \quad \tilde{h} = \tilde{H}_c h \quad (4c, 4d)$$

ここで $\tilde{c} - \tilde{U} = \tilde{V}$ であり、 $\tilde{V}_c$ と $\tilde{H}_c$ はそれぞれ移動座標系

における限界流速および限界水深である。また、 $\tilde{U}$ は水深平均した流下方向流速、 $\tilde{h}$ は水深、 $\tilde{t}$ は時間、 $\tilde{x}$ は流下方向座標、 $\tilde{c}$ は波の位相速度である。抵抗係数 C_f は簡略化のために定数とする。 σ は正規化された勾配

($=\sin\theta/C_f = Fn^2$) であり、 Fn は等流状態におけるフルード数である。

移動座標系上で転波列が形状を変化させないとすると、式(1), (2)は時間微分項が落ちて次のようになる。

$$V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} + \sigma - \frac{(c-V)^2}{h} \quad (5)$$

$$\frac{\partial Vh}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

式(5)および(6)を変形すると次のようになる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sigma h^3 - (ch-1)^2}{h^3 - 1} \quad (7)$$

ここで h が 1 のときでも水面勾配が無限大とならないようにするためには、右辺の分子が同時に 0 でなければならない。すなわち位相速度は次の関係を満足しなければならない。

$$c = \sigma^{1/2} + 1 = Fn + 1 \quad (8)$$

式(7)を転波列の最大の水深 $h_{\max}$ から最小の水深 $h_{\min}$ まで積分することで転波列の波長 L が決定される。 $h_{\max}$ と $h_{\min}$ は運動量の保存から次の関係がある。

$$V_{\min}^2 h_{\min} + \frac{h_{\min}^2}{2} = V_{\max}^2 h_{\max} + \frac{h_{\max}^2}{2} \quad (9)$$

図1に Fn と $h_{\min}$ を与えたときの転波列の形状を示す。

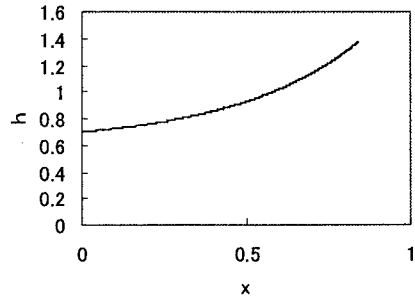


図1 転波列の形状 ($Fn=3$, $h_{\min}=0.7$)

2.2 摂動展開

波長に次のような摂動を導入する。

$$L = L_0 + \varepsilon e^{\Omega t} \quad (10)$$

ここで ε は微小パラメータ、 Ω は擾乱の成長率であり、上の摂動に対応する流速、水深は次のように表すことができる。

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 e^{\Omega t} \quad (11)$$

$$h = h_0 + \varepsilon h_1 e^{\Omega t} \quad (12)$$

式(5)および(6)に(11)および(12)を代入すると次式が得られる。

$$\frac{dV_1}{dx} = \frac{\Omega h_0 + 2(ch_0 - 1)h_0^{-1} + (h_0^{-1} + h_0^2)h_0'}{1 - h_0^3} V_1 - \frac{\Omega h_0^2 + h_0' - (ch_0 - 1)^2 h_0^{-3}}{1 - h_0^3} h_1 \quad (13)$$

$$\frac{dh_1}{dx} = -\frac{\Omega h_0^3 + 2(ch_0 - 1)h_0 + 2h_0 h_0'}{1 - h_0^3} V_1 + \frac{\Omega h_0 + h_0^{-1} h_0' - (ch_0 - 1)^2 h_0^{-1}}{1 - h_0^3} h_1 \quad (14)$$

2.3 境界条件

上流端 ($x = 0$), 下流端 ($x = L$) において次の運動量の保存が成り立つ。

$$V^2(0)h(0) + \frac{h^2(0)}{2} = V^2(L)h(L) + \frac{h^2(L)}{2} \quad (15)$$

式(15)は次のように展開される。

$$2V_1(0) + \{h_0^{-2}(0) + h_0(0)\}h_0(0) = 2\{V_0'(L_0) + V_1(L_0)\} + \{h_0^{-2}(L_0) + h_0(L_0)\}\{h_1(L_0) + h_0'(L_0)\} \quad (16)$$

また、式(14)において $h_0 = 1$ であるとき、分子も 0 でなければならない。よって次式が成り立つ。

$$-(\Omega + \frac{2}{3}Fn^2 + \frac{2}{3})V_1 + (\Omega - \frac{2}{3}Fn^2 - \frac{2}{3})h_1 = 0 \quad (17)$$

次に摂動を与える前後では平均流量は一定であるため、次式が成り立つ。

$$\frac{c}{L_0} \int_0^{L_0} h_0 dx - 1 = \frac{c}{L_0 + \alpha \Omega} \int_0^{L_0 + \alpha \Omega} (h_0 + h_1 e^{\Omega x}) dx - 1 \quad (18)$$

整理すると次式が得られる。

$$-L_0^{-1} \int_0^{L_0} h_0 dx + \int_0^{L_0} h_1 dx + h_0(L_0) = 0 \quad (19)$$

式(13), (14)は V_1 , h_1 , Ω の 3 つの未知数を含んでおり、(16), (17)および(19)の 3 つの境界条件とともに 2 点境界値問題を形成している。これを 2 点境界値問題の数値解法の一つであるねらい撃ち法を用いて解く。

3. 結果と考察

図 2 に擾乱の成長率 Ω のコンタ図を示す。また、表 1 に示す Brock¹⁾ が行った微小振幅転波列に関する実験の結果をあわせて図 1 にプロットした。ここで C_f はほ

ぼ一定であるので、それらの中間的な値である $C_f = 0.0035$ を用いた。

擾乱の成長率が負であれば擾乱は減衰するため、波長が決定されると考えられる。しかし、図 2 で擾乱の成長率はすべて正の値をとっており、負の値は現われていない。波長 L が 0.2 から 0.5 の間に擾乱の成長率のピークが現われ、波長 L が長くなるにつれて擾乱の成長率は 0 に近づいている。このことから波長 L は成長率が 0 となる波長に近づくと考えられる。また、図 2 を見ると、Brock の実験値は擾乱の成長率のピークを少し外れている。これは最も不安定であるピークを避けて波長が存在しているためと考えられる。

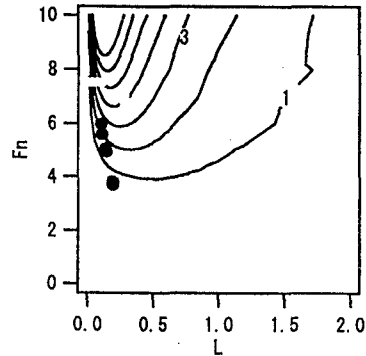


図 2 擾乱の成長率 Ω のコンタ図

表 1 Brock による微小振幅転波列に関する実験結果

$\sin \theta$	F	C_f	L/H_n	L
0.05011	3.71	0.00364	130	0.1907
0.05011	3.81	0.00345	133	0.1913
0.08429	4.96	0.00343	118	0.1420
0.08429	5.06	0.00329	115	0.1359
0.1192	5.60	0.00380	97.3	0.1080
0.1192	5.98	0.00333	94.8	0.1007

4. 結論

転波列波長の線形安定解析を行い、波長が長くなるほど擾乱の成長率が 0 に近づくことがわかった。また、実験値は擾乱の成長率のピークを少し外れて存在していた。今回の研究では、擾乱の成長率に負の値は現われず、未だに波長は求まっていない。今後、さらなる研究が必要である。

参考文献

- 1) Brock, R. R., Development of roll waves in open channels, Report No. KH-R-16, W. M. Kech Laboratory, California Institute of Technology, 226p, 1967