

II-31

河床波の遷移過程に関する実験およびその結果に対する理論的考察

東北大学大学院 学生会員 ○山口 里実
 東北大学大学院 正会員 泉 典洋
 東北大学大学院 学生会員 五十嵐 章

1. はじめに

河床形態は河道抵抗に対して大きな影響を与えるため、水理量に応じた河床形態を予測することは重要である。洪水時の河床形態では、流量が小さい場合にデューン（河床波）が発生し、流量がある程度大きい場合にはデューンが消滅し平坦床となるような遷移過程が観測されている。さらに、その遷移過程には、流量増加時にデューンが消滅する流量の臨界値が流量減少時にデューンが再び現れる臨界値よりも大きくなるというヒステリシス現象の見られることが知られている¹⁾。五十嵐らは流量を徐々に増加・減少させる実験によって、デューンの遷移過程に見られるヒステリシスを確認している²⁾。また、著者らはデューンの遷移過程に関する弱非線型安定解析を行い、遷移過程にヒステリシス現象の現れる可能性を理論的に示している³⁾。本研究は著者らの行った弱非線型安定解析を適用することで五十嵐らの実験結果を理論的に考察する。

2. デューンの遷移過程に関する実験

五十嵐らは、デューンが消滅するまで徐々に流量を増加させた後、デューンが再発生するまで徐々に流量を減少させることによってデューンの遷移過程に関する実験を行っている²⁾。その結果、流量増加時にデューンの消滅する流量が減少時に再発生する流量よりも大きいこと、それに伴い水深・流量の関係にループが描かれることなどが確認されている。

3. 実験で観測されたフルード数の変化

Engelund⁴⁾ および Fredsøe⁵⁾ は底面流速と摩擦速度の関係を次のように表している。

$$u_b/u^* = K = 1.9 + 2.5 \ln(D/k_s) \quad (1)$$

ここで u_b 、 u^* 、 D および k_s はそれぞれ底面流速、摩擦速度、等流水深および粗度高さである。また、彼らは水深方向の等流流速分布を二次関数の形で表しており、その平均流速 $\bar{U}$ を用いると、次のような抵抗測が求められる。

$$\bar{U}/u^* = 6.2 + 5.75 \log(D/k_s) \quad (2)$$

また、Einstein⁶⁾ に従い、河床が平坦な場合の粗度高さ k_s は $k_s = D_{65}$ で与えられるものとする。 $u^* = \sqrt{gDS}$ および $\bar{U} = Q/D$ の関係を式 (2) に代入し、単位幅流量 Q および河床勾配 S を与えると、デューンの発生が無い平坦床に対応した等流水深 D が求められる。

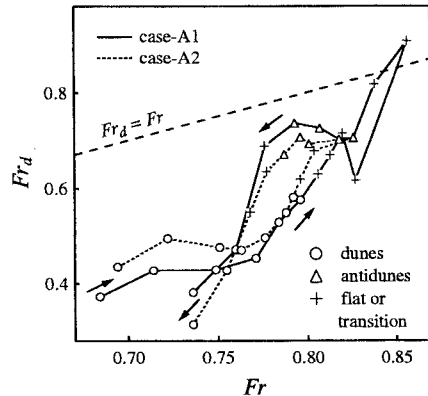


図-1 Fr_d および Fr の関係。

図-1 に五十嵐らの実験で観測されたフルード数 Fr_d の変化を示す。図中の矢印は流量の増加・減少過程を表している。ここで横軸は式 (2) を用いて得られるフルード数 Fr であり、 Fr_d および Fr は次式で表される。

$$Fr_d = Q/\sqrt{gH^3}, \quad Fr = Q/\sqrt{gD^3} \quad (3a, b)$$

ここで H は実験で観測された平均水深である。 Q は実験で与えられた単位幅流量であり、等流水深 D は Q に対応して式 (2) より得られる。このとき Fr はデューンの発生が無い平坦床に対応したフルード数（以下、等流フルード数）として求められ、流量の増加・減少に対応して等流フルード数 Fr の値も増減することになる。図を見ると、流量増加時は等流フルード数 Fr が 0.81 程度でデューンが消滅し、流量減少時は 0.76 程度でデューンが再び発生しているのがわかる。

もし河床が完全に平坦であればデータは破線が示す $Fr_d = Fr$ 上に位置することになるのに対し、何らかの要因で河床の抵抗が増加すると Fr_d は $Fr_d = Fr$ よりも小さい値を示すことになる。図では、河床形態がデューンである場合、アンティデューンまたは平坦床である場合に比べて、 Fr_d の値が小さくなっており、デューンの発生による抵抗の増加が確認できる。このため、流量の増加時には Fr が 0.81 程度に流量が増加するまで Fr_d は Fr に対してかなり低い値を示しているのに対して、減少時には Fr が 0.76 程度に減少するまで Fr_d は Fr に近い値を示すことになる。

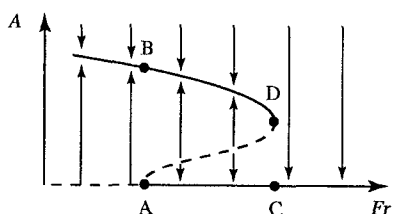


図-2 亜臨界分岐形態。

4. 弱非線型安定解析の適用

著者ら³⁾は、底面でのスリップ速度が式(1)で表せると仮定し、デューンの遷移過程に関する弱非線型安定解析を行っている。線形安定解析の結果、平坦床に与えられる摂動の線形増幅率 Ω が式(3b)で表される等流フルード数 Fr および無次元波数 k の関数として求まり、この Ω の値が正の領域でデューンが発生することになる。弱非線型安定解析では $\Omega = 0$ の中立点でフルード数を展開することによって、次のような非線型振幅方程式が導かれる。

$$\frac{dA}{dT} = \alpha_0 A + \alpha_1 |A|^2 A \quad (4)$$

ここで A は摂動の振幅であり、右辺第一項の係数 α_0 は線形増幅率に相当する。第二項の係数 α_1 はランダウ定数と呼ばれ、この α_1 の値が正の場合には解は中立点($Fr = F_c$)において、図-2のような亜臨界分岐形態を示す(図中A点が中立点($Fr = F_c$)に相当)。この時、図に示すように二つの安定解が存在し、フルード数の増加および減少時に異なる解が現れるため、流量増加時と減少時では河床形態が異なることが説明される。

五十嵐らの実験では等流フルード数 Fr の値が0.76程度で平坦床からデューンへの遷移が生じている。このときの等流水深は4 cm程度、等流シールズ数は0.2程度となる。河床勾配0.002、粒径0.4 mmおよび等流シールズ数を0.2として上述の理論を適用すると、図-3および表-1の結果が得られる。図-3中の実線は線形安定解析より求められた中立曲線であり、この内側で線形増幅率 Ω が正であることから、この領域内でデューンが発生し、それ以外の領域では発生しないことが示されている。一方、プロットされたデータは五十嵐らの実験結果であり、これを見ると、流量増加時には中立曲線を大きく超えても(増幅率が負の領域に達した後も)デューンが存在しているのに対して、流量減少時には平坦床からデューンへの遷移が中立点付近で生じていることがわかる。この平坦床からデューンへの遷移は波数が $k = 0.7$ 程度で生じており、この波数に対応する中立点は $F_c = 0.745$ 程度であることを考慮して弱非線型安定解析を行った結果、表-1が示すように式(4)中のランダウ定数 α_1 の実部が正の値となった。この場合、デューンには図-2のような分岐形態が現れることになり、実験で観測されたデューンの遷移過程は理論を用いて

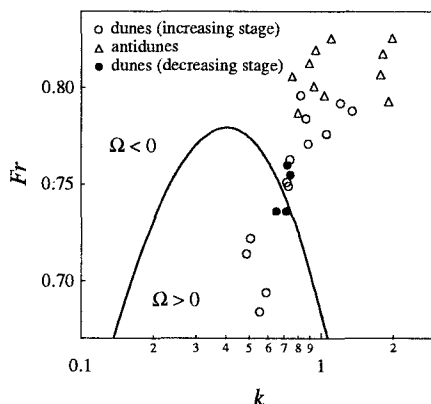


図-3 線形安定解析より求められた中立曲線および実験結果。

表-1. 弱非線型安定解析の結果。非線型振幅方程式(4)における定数 α_0 および α_1 の値。

k	F_c	$\text{Re}(\alpha_0)$	$\text{Re}(\alpha_1)$
0.70	0.745	3.07	682

次のように説明される。流量の増加時、振幅は安定解BDに従うためデューンは中立点を超えても消滅しない。これに対して、さらに流量が増加して一旦平坦床となった後、流量が減少する過程では安定解CAに従うため中立点においてデューンが発生する。

理論ではデューン背後に発生する剥離や浮遊砂の影響は考慮されていない。以上のことを考慮すれば、実験と理論の一致は妥当な範囲にあると考えられる。

5. おわりに

五十嵐らの実験結果に対し弱非線型安定解析³⁾を適用した結果、デューンの遷移過程に見られたヒステリシス現象がこの弱非線型安定解析の結果によってほぼ説明できることがわかった。

参考文献

- 1) 石川忠晴, 利根川・江戸川の河道粗度係数について, 土木研究所資料, 第1943号, 46, 1983-3.
- 2) 五十嵐章, 泉典洋, 山路弘人, 流況変化に伴う河床波の遷移過程に関する実験, 東北支部技術発表会, 2002.
- 3) 山口里実, 泉典洋, デューン-平坦床遷移過程に見られる亜臨界分岐, 土木学会論文集(投稿中).
- 4) Engelund, F., Instability of erodible beds, *J. Fluid Mech.*, Vol. 42, 225-244, 1971.
- 5) Fredsøe, J., On the development of dunes in erodible channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, 1-16, 1974.
- 6) Einstein, H. A., The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flow, USDA, Soil Conservation Service, Technical Bulletin, No. 1026, pp. 1-71, 1950.