I −20 Laplace 変換による桁の一部に等分布荷重の載荷したときのたわみ

岩手大学工学部　正 員　○宮本 裕　岩崎 正二　出戸 秀明
長野工業高等専門学校　正 員　永藤 寿宮
岩手大学工学部　学生員　荒田 智博

1. まえがき

道路橋の設計において, 活荷重によるたわみの計算をする過程がある. そのとき桁中央付近に等分布荷重が載荷する時の桁中央のたわみ公式について, 参考文献により公式が種々発表されている. ここでは, 著者らが Laplace 変換を用いてたわみ公式を誘導した.

2. たわみ公式の誘導

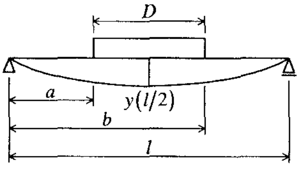


図-1

図-1 のような桁の途中に等分布荷重が作用する時のたわみの微分方程式を式 (1),(2) のようにおく.

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x) = q \qquad (a < x < b) \tag{1}$$

あるいは,

$$EIy^{(4)} = q \qquad (a < x < b) \tag{2}$$

Laplace 変換をして, $x = 0$ における $y(0), y'(0), y''(0)\left(= -\frac{M(0)}{EI}\right), y'''(0)\left(= -\frac{Q(0)}{EI}\right)$ を用いて解を表すと式 (3),(4),(5) になる.

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}\left(-\frac{M(0)}{EI}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(-\frac{Q(0)}{EI}\right) \qquad (0 < x < a) \tag{3}$$

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}\left(-\frac{M(0)}{EI}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(-\frac{Q(0)}{EI}\right) + \frac{q}{EI}\frac{1}{4!}\left\{(x-a)^4\right\} \qquad (a \leqq x < b) \tag{4}$$

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}\left(-\frac{M(0)}{EI}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(-\frac{Q(0)}{EI}\right) - \frac{q}{EI}\frac{1}{4!}\left\{(x-b)^4 - (x-a)^4\right\} \qquad (b \leqq x < l) \tag{5}$$

桁の左端の境界条件を考慮して,

$$y(0) = 0 \quad , \quad M(0) = 0 \quad , \quad Q(0) = \frac{1}{2}qD \tag{6}$$

さらに右端の境界条件 $x = l$ のとき, $y(l) = 0$ を考慮すると,

$$y'(0) = \frac{l^2}{12EI}qD + \frac{q}{24EIl}\left\{(l-b)^4 - (l-a)^4\right\} \tag{7}$$

が得られる.

よって, 中央付近のたわみ式は式 (8) となる.

$$y(x) = x\left[\frac{l^2qD}{12EI} + \frac{q}{24EIl}\left\{(l-b)^4 - (l-a)^4\right\}\right] - \frac{x^3}{6EI}\left(\frac{1}{2}qD\right) + \frac{q}{24EI}(x-a)^4 \qquad (a \leqq x < b) \tag{8}$$

スパン中央のたわみを求めるには, $x = a + \frac{D}{2}$ あるいは $x = \frac{l}{2}$ を式 (8) に代入して,

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{384EI}\left\{16l^3D + 8(l-b)^4 - 8(l-a)^4 - 4l^3D + D^4\right\} \tag{9}$$

を得る.

ここで, 式を変形するために $l - D = A$ とおくと,

$$a = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(l-D) \quad , \quad b = \frac{1}{2}A + D = \frac{1}{2}(l-D) + D = \frac{1}{2}(l+D) \tag{10}$$

したがって,

$$8(l-b)^4 = 8\left\{l - \frac{1}{2}(l+D)\right\}^4 = \frac{1}{2}(l-D)^4 \tag{11}$$

$$8(l-a)^4 = 8\left\{l-\frac{1}{2}(l-D)\right\}^4 = \frac{1}{2}(l+D)^4 \tag{12}$$

これらを考慮して，中央点のたわみの計算を進めると式 (13),(14) となる．

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{384EI}\left(8l^3D - 4lD^3 + D^4\right) \tag{13}$$

さらに $D = l - A$ とおいて計算すると，

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{384EI}\left(5l^4 - 6l^2A^2 + A^4\right) \tag{14}$$

が得られる．

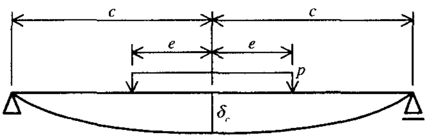
ここで,A の代わりに c で表し,$c = l - D$ とおくと式 (15) となり，これを参考文献 4) の合成桁のたわみの式としたのである．

$$\delta = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{384EI}\left(5l^4 - 6l^2c^2 + c^4\right) \tag{15}$$

$l = 30m, D = 10m$ のとき，参考文献 1), 2), 3), 4) の式を用いた結果は全て，

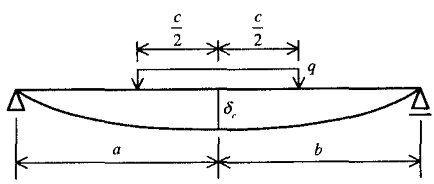
$$\delta = \frac{q}{38EI}\left(2.050 \times 10^6\right) \tag{16}$$

となり一致した．



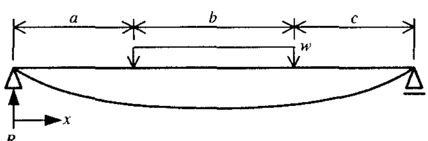
$$\delta_c = \overline{A_1}\alpha_1 + \overline{A_2}\alpha_2$$
$$\overline{A_1} = pc^2e/2EI \qquad \overline{A_2} = -pe^3/6EI$$
$$\alpha_1 = \frac{2}{3}c \qquad \alpha_2 = \frac{1}{4}(4c-e)$$

図-2 文献 1) によるたわみ



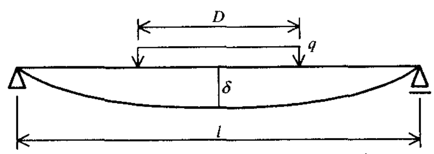
$$y_c = \frac{qc}{6EI}\left\{\frac{ab}{l}\left(2al - 2a^2 - \frac{c^2}{4}\right) + \frac{c^3}{64}\right\}$$

図-3 文献 2) によるたわみ



$$R_A = \frac{w\beta}{2}(b+2c)$$
$$y(x) = \frac{wl^4}{24EI}\left\{\left(\frac{x}{l}\right) - \alpha\right\}^4 + \frac{R_Al^3}{12EI}\left\{\left(2-\beta^2-2\beta\gamma-2\gamma^2\right)\left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}$$
$$\alpha = \frac{a}{l} \qquad \beta = \frac{b}{l} \qquad \gamma = \frac{c}{l}$$

図-4 文献 3) によるたわみ



$$\delta = \frac{q}{384EI}\left(5l^4 - 6l^2c^2 + c^4\right)$$ ただし，$c = l - D$

図-5 文献 4) によるたわみ

3. あとがき

著者らの誘導した桁中央付近に等分布荷重が載荷する時の桁中央のたわみ公式は，参考文献のそれぞれ異なる表現の公式と解析的にも数値計算的にも一致することを確認した．

参考文献

1) 土木学会構造力学公式集編集委員会，構造力学公式集，土木学会, 1997.
2) 土木学会，土木工学ハンドブック，技報堂出版, 1989.
3) Jam J. Tuma，Structural Analysis，McGRAW-HILL，pp.131, 1969.
4) 宮本裕 他，橋梁工学，技報堂出版，pp.303，1997.