I －15　有限要素のゆがみに起因した精度劣化の一評価指標

東北大学　学○ 渡邊育夢　正 寺田賢二郎
電源開発 (株)　正 五月女敦　正 杉山弘泰

1. はじめに

土木構造物は不均質性に起因する複雑な幾何学的特性を有していることが多く，必然的に有限要素モデルにも複雑かつ不規則なメッシュ分割を強いられ，解析結果の正当性を主張する際には，解析者がある程度，有限要素法を習熟していることが要求される．

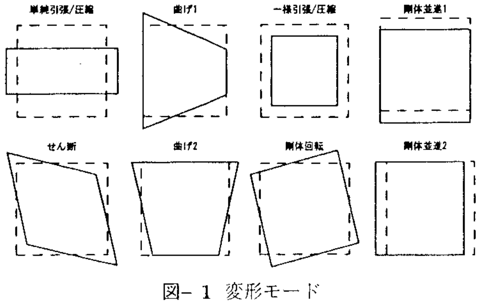
このような問題に対応する手段として有限要素法の離散化誤差の事後評価や評価された誤差の最小化を目的としたアダプティブ法に関する研究が数多くなされている [1)]．これらは自由度を増やすことにより，全体での近似精度を上げようというもので，有限要素の品質を評価しようというものではない．他方，有限要素がどの程度正確に物理量の変化を表現し得るかという要素の近似性能は要素形状への解の依存性や要素がある変形モードを適切に表現できるかどうかなどについての研究も行われてきたが，それを定量的に評価するための指標が存在しない．そこで本研究では，有限要素の性能を評価するための指標を提案し，有限要素解析における誤差の一因である有限要素のゆがみによる解の劣化を評価し得ることを示す．

2. 変形性能を評価する指標

2.1 要素剛性行列の固有値

要素剛性行列は形状関数，材料定数，要素の幾何形状からなり，有限要素解析における解くべき境界値問題とは関係なく，計算することができる．この要素剛性行列には有用な情報が内在している．例えば，四辺形一次要素の場合，要素剛性行列 $\boldsymbol{K}_e$ の固有値解析により，**図–1** に示す 8 組の独立な変形モード (固有ベクトル)$\boldsymbol{e}_i$ と対応した固有値 λ_i が得られる。固有値は

$$\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i \Rightarrow \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i$$



図– 1　変形モード

と表され，固有ベクトルに対応する変形に関するひずみエネルギーは

$$U_e(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{e}_i$$

であるから，要素剛性行列 $\boldsymbol{K}_e$ の固有値の物理的な意味は，対応する変形モードを生じさせるために必要なエネルギーの 2 倍の大きさである．

2.2 指標の定義

図–1 の変形モードは四辺形一次要素ならばどんな形状でも変わらず，要素のゆがみによって変形性能が変化するようであれば，要素剛性行列の固有値に反映されるはずである．このことから，要素剛性行列の固有値を用いてゆがみに起因する精度劣化の指標を提案する．

まず，固有値の総和が最小となるような形状を定形要素とする．四辺形要素ならば正方形となる．この定形要素が対象とする要素と同材料同面積であるときの要素剛性行列の固有値と固有ベクトルを λ_{0i}, $(\bar{e}_i\ i = 1,\cdots,8)$ と定義する．定形要素の変形モードはこの固有ベクトルで表されるので，$\bar{e}_i$ を用いて，対象とする要素の各変形モードに対応する固有値は

$$\lambda_i = \bar{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_e\bar{\boldsymbol{e}}_i \qquad (i = 1,\cdots,8)$$

と表すことができる．これらを用いて，以下の指標を定義する．

$$\Delta = \frac{\sum\lambda_i - \sum\lambda_{0i}}{\sum\lambda_{0i}}$$

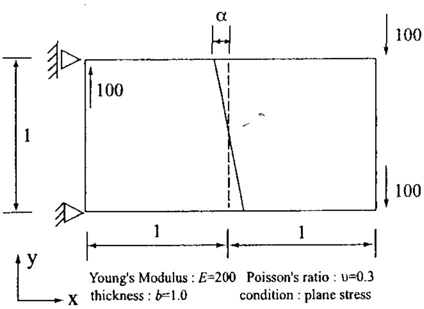
この指標 Δ は，対象としている任意の要素とそれを基に定義した架空の定形要素の固有値の総和の比からなる．言い換えれば，規定の変形モードに関して，要素形状がゆがむことにより，増加した必要なエネルギー量の割合である．

3. 適用例

3.1 解析モデル

図–2 のようなせん断荷重条件下の梁を考える (平面ひずみ状態)．この梁をアイソパラメトリック四辺形要素により，2 要素でモデル化する．**図–2** に示す α を変化させ，要素に与えるゆがみを制御する．

ここでは一般的な変位法による一次要素 (QUAD4)，高性能な要素として知られる Wilson-Taylor の非適合要素 (QM6) [2)]，定ひずみ三角形要素 4 つで構成し，中



図－2 解析モデル

心の１点を縮約した要素（CTRIA3）の３種類の要素を用いる．

せん断荷重や曲げに対して，２次の曲げの変形モードを持たない要素は良い答えを得ることができないことは知られており，このケーススタディは要素の性能を調べる際によく用いられる．

3.2 ゆがみと誤差

この問題は梁端部の鉛直変位 v に関して，梁理論により厳密解を得ることができる．この厳密解を用いて，有限要素解の誤差とゆがみ α の関係は**図–3** になる．先に述べたように QUAD4 や CTRIA3 は曲げに対応する変形モードを持っていないため，ゆがみがあるないに関わらず，良い解を得ることはできない．一方，内部的に曲げの変形モードを持つ QM6 は良い解を得ることができる．これが要素の性能の差であり，**図–3** に見られるようにゆがみに対する感度も大きく異なる．

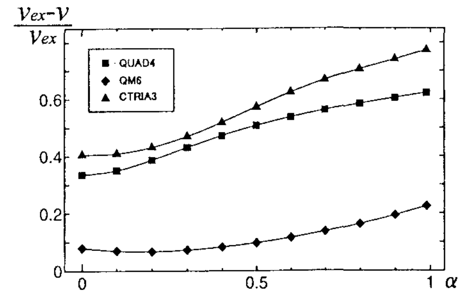
本研究で提案した指標と誤差の関係を**図–4** に示す．変形性能を評価する指標であるため，ゆがみが大きくなったときの変形性能の劣化という形で，要素の変形性能の差も反映されている．また，各要素共通して 10^{-1} のオーダーで大きく解が劣化するという傾向が見られ，変形性能と解の劣化を議論するための定量的な指標として利用できると考えられる．

最後に，提案した指標の有限要素メッシュに対する適用例を**図–5** に示す．

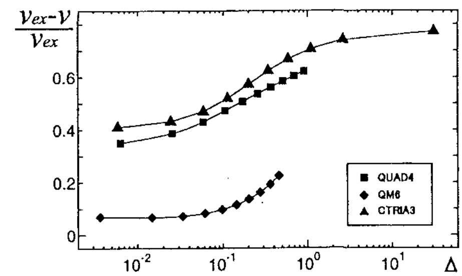
4. 結論

本研究では，有限要素の変形性能を評価する指標として要素剛性行列の固有値を用いて定義した．

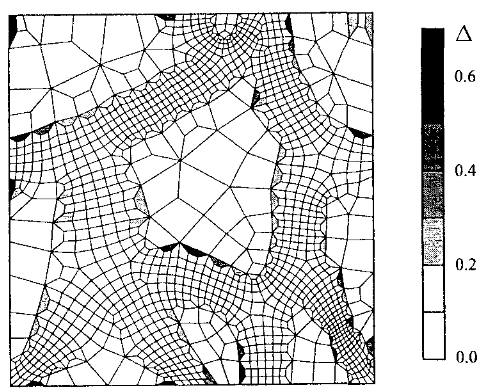
多くの汎用コードでは要素形状のゆがみを評価する指標としてアスペクト比，テーパなどの要素のを構成する辺長比や内角などの代表角度などを用いた指標を採用している．しかし，テーパは台形のゆがみを検出



図－3 ゆがみと誤差



図－4 変形性能と誤差



図－5 適用例

できるが，平行四辺形をできないなど，一般的にゆがみを評価することはできず，ゆがみによる解の劣化を考慮するためにはユーザーは複数の指標を併用しなければならない．提案した指標はエネルギー的観点から変形性能を評価するため，ゆがみによる要素の変形性能の変化を統一的に評価でき，解の劣化と変形性能の関係を定量的に議論することができると考えられる．

参考文献

1) B. Szabo and I. Babuska, Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1991
2) R. L. Taylor, P. J. Beresford and E. L. Wilson, A non-conforming element for stress analysis, Int. J. Numer. Meth. Eng. 10, 1211-1220, 1976