

## I-14 有限被覆法による非均質体メゾ構造の弾塑性解析

東北大学 学生員 車谷麻緒  
 東北大学 学生員 浅井光輝  
 東北大学 正会員 寺田賢二郎

## 1. はじめに

Shiにより提案されたマニフォールド法<sup>1)</sup>を継承する有限被覆法 (Finite Cover Method, 以下 FCM) は、近似関数を定義する数学領域と支配方程式を満足させる物理領域とが分離可能であるという特徴を有する。すなわち、複雑な形状を有する構造においても、FCMは定形のメッシュのみで解析可能である。また、第2、第3著者らにより提案された Hybrid-FCM<sup>2)</sup>を用いることにより、多相材料の解析においても FCM は有効な解析手法であることが知られている。

本研究では、まず、有限要素法 (FEM) と異なり、ブリプロセッサが存在しない FCM に対し、新規の有限被覆モデル生成法を提示する。そして、非均質な構造に対し、Hybrid-FCM による材料非線形を考慮した弾塑性有限被覆解析を実施する。

## 2. FCM の概説

## (1) 被覆

FCM は解析対象の分割と全体系への連立方程式の構築という点では FEM と同様であるが、「近似関数を定義する数学領域」と「支配方程式が満たされるべき物理領域」を分離して考えるという点で FEM とは大きく異なる。前者は「数学被覆」と呼ばれ、物体領域を余すことなく覆い尽くすように重ね合わされ、物体領域と数学被覆の重なり合う領域「物理被覆」において剛性方程式を組み立てる。

## (2) 関数の定義

各数学被覆  $i$  において変位を規定するために以下の2つの関数が定義される。

$$u_i(x, y) : \text{被覆変位関数} \quad (1)$$

$$w_i(x, y) : \text{重み関数} \quad (2)$$

重み関数としては、数学被覆内ではある値を持ち、被覆外では零となるようなものである。この重み関数は、数学被覆同士の共通領域での総和は1であるといった制約 (Partition of Unity) が課される。結局、全体変位関数は以下のように定義される。

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^k w_i(x, y) u_i(x, y) \quad (3)$$

ここで、 $k$  は数学被覆総数である。なお、本研究では重み関数として FEM の双一次の形状関数を用いている。

## (3) Hybrid-FCM

2相材料の物理問題を考える際、FCM では、物理境界上に解析自由度が存在するとは限らないため、幾何学的境界条件を付帯拘束条件として加えなければならない。これらの付帯条件は、Lagrange 未定乗数  $\lambda$  を導入することにより取り除くことができ、弱形式のつり合い方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} \nabla \delta \mathbf{u} : (\mathbf{c} : \nabla \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u} \cdot \lambda d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_{\pm}} \delta \mathbf{u}^+ \cdot \lambda d\Gamma - \int_{\Gamma_{\pm}} \delta \mathbf{u}^- \cdot \lambda d\Gamma \\ = \int_{\Omega^+} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{\pm}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (4) \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_{\pm}} \delta \lambda \cdot (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\pm}} \delta \lambda \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{u}$  は変位、 $\mathbf{c}$  は弾性テンソル、 $\mathbf{t}$  は表面力、 $(\cdot)^{\pm}$  は各領域内で定義される物理量である。式 (4) と (5) を離散化して解く際に、変位と Lagrange 未定乗数の両者を独立変数として扱う Augmented Lagrangian 法<sup>3)</sup>を適用する。

## 3. レベルセット関数を用いた有限被覆モデル

FEM では、物理境界線 (面) 上に解析自由度 (節点) を配置し、要素を生成する。これに対して、FCM では、物理境界は線 (面) で定義され、その領域を正方形メッシュからなる数学被覆で覆うことで解析モデルが生成される。本研究では、この境界線の探索方法として、画像データを基盤としたレベルセット (符号付き距離) 関数を用いる。

$$f_{\text{level}} = \min_{\bar{x} \in \Gamma} |x - \bar{x}| \text{sign} \{n(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})\} \quad (6)$$

図-1 に示されるように、画像データを用いて数学節点上の符号付距離関数を式 (6) により算出する。そして、4 点の距離関数の値を用いて双一次の形状関数で補間することにより、距離関数が零の位置を算出し、物理境界線を特定する。

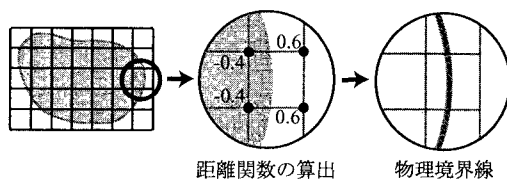
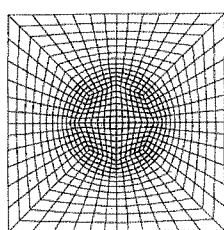
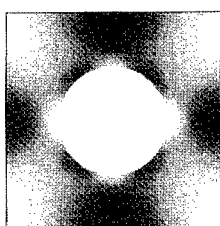


図-1 レベルセットモデリング

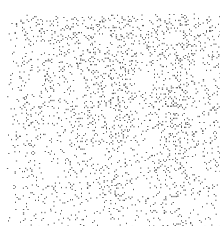


要素数 720

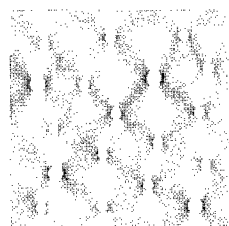


相当塑性ひずみ分布

図-2 FE 解析モデルと解析結果

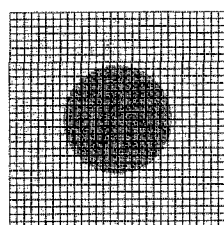


定形 50×50

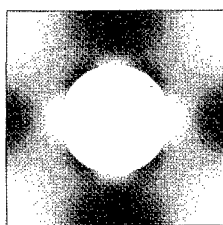


相当塑性ひずみ分布

図-4 ボイドを有する構造

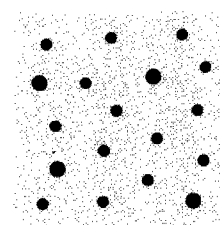


定形 30×30

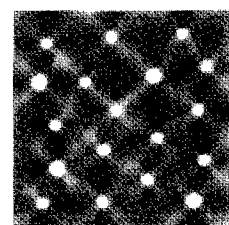


相当塑性ひずみ分布

図-3 FC 解析モデルと解析結果



定形 50×50



相当塑性ひずみ分布

図-5 介在物を多数有する構造

#### 4. 弾塑性有限被覆解析

弾塑性解析を行うに際し、弾塑性構成則には等方硬化に基づく  $J_2$  流れ則を仮定している。数値解析例として、以下に示される4つのモデルを用意した。これらの材料定数と硬化パラメータは母材を  $(\cdot)_1$ 、介在物を  $(\cdot)_2$  として以下のように設定する。なお、母材を弾塑性体、介在物は線形弾性体を仮定しており、全て上下方向に一樣な引張り力を与えている。

$$\begin{aligned} E_1 &= 200 \text{ GPa} \quad , \quad \nu_1 = 0.3 \\ E_2 &= 400 \text{ GPa} \quad , \quad \nu_2 = 0.3 \\ \sigma_Y &= 300 \text{ MPa} \quad , \quad H = 20 \text{ GPa} \end{aligned}$$

##### (1) 円形介在物1個を有する構造

円形介在物1個を有する比較的単純な構造に対して、FEMとFCMの両者の結果の比較を通じて、FCMの妥当性を検証する。FEMでは図-2(左)に示されるモデルを用いた結果、相当塑性ひずみは同図(右)のような分布を示す。これに対し、FCMでは、FEMのモデルと同様の図-3(左)に示される画像を容易し、定形のメッシュのみで同様に弾塑性解析を行った結果、図-3(右)のような相当塑性ひずみ分布を示している。図-2と図-3に示されるように、FCMでは定形のメッシュを用いているのに対し、FEMでは場所ごとに異なったメッシュ形状をいているため定量的な比較は行えないが、これらは定性的には一致した結果を示して

いる。

##### (2) ボイドおよび円形介在物多数を有する構造

通常FEMでは図-4や図-5に示される構造に対してモデル化を行う際、多大な労力を必要とするが、FCMでは図に示される画像を用意するだけで定形のメッシュのみで解析が可能である。さらに、解析結果から分かるように、ボイドおよび介在物をつなぐ領域付近で塑性ひずみが進行するといった典型的な特性が十分に表現できているといえる。

#### 5. おわりに

正方形メッシュのみで解析可能なFCMに対して、画像からレベルセット関数を用いることにより、複雑な形状を有する構造に対してもプリプロセスが瞬時に実行する方法を示した。また、Augmented Lagrangian法を用いたHybrid-FCMによる弾塑性解析では、FEMの結果と定性的に一致していることを確認するとともに、複雑な形状を有する非均質な構造に対しても容易に弾塑性解析が行えることを確認した。

#### 参考文献

- 1) Shi, G.H.: *Manifold method of material analysis*, Transactions of the 9<sup>th</sup> Army Conference On Applied Mathematics and Computing, Report Np.92-1, U.S. Army Research Office, 1991.
- 2) 浅井光輝, 寺田賢二郎, 池田清宏, 山岸道弘: Hybrid-FCMの開発とその多相材料の界面破壊解析への適用, 応用力学論文集 Vol.4, pp.85-94, 2001.
- 3) Simo, J.C. and Laursen, T.A.: *An Augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction*, Comput. Struct., Vol.42, No.1, pp.97-116, 1992.