# I －13　　複合材料の有限要素解析

東北大学工学部　○学生員　樋口 耕平
東北大学大学院工学研究科　正 員　岩熊 哲夫

## 1. はじめに

コンクリートや繊維補強材等の複合材料の巨視的な挙動は微視的なものの平均として現れている．平均化手法には均質化法のような数値的なものもあるが，森・田中理論はEshelbyのテンソルを通して介在物の形状も考慮することができ，解析的に平均を求めることが可能な場合がある長所を持っている．しかしその理論はそのままでは境界値問題には適用できない．そこで，有限要素の材料則に森・田中の結果を用いれば，確率有限要素法の適用や最適設計で材料特性を定めることが構造物のレベルで可能になると考えた．また剛性の上下界も予測できるので，材料開発にも有用であると考えられる．ここでは平面ひずみ状態を例にして，いくつかの結果を示す．

## 2. 構成モデルと有限要素法への適応

無限体と考えてよい母材中に，1種類の材料からなる相似な形状の無数の介在物が，同じ方向を向いて不規則に分布しているとき，複合材料全体の平均応力と平均ひずみ，$\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\varepsilon}$，の関係は森・田中の手法により

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\varepsilon} \tag{1}$$

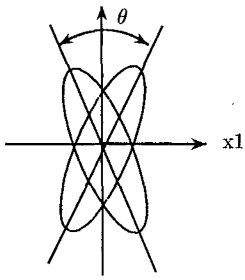
$$\bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}\{\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (1-f)(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{S}\}^{-1}[\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}})\{\boldsymbol{S} - f(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I})\}] \tag{2}$$

と表すことができる．ここに，$\boldsymbol{S}$ はEshelbyのテンソル，$\boldsymbol{C}_M$，$\boldsymbol{C}_I$ は母材，介在物の弾性係数テンソル，$f$ は介在物の体積比率，$\boldsymbol{I}$ は単位テンソルである．介在物の形状は $x_3$ 方向に無限に長い楕円柱介在物に限定し，それを平面ひずみ状態として，$x_1 - x_2$ 平面において楕円形状の介在物が存在する場合を考える．

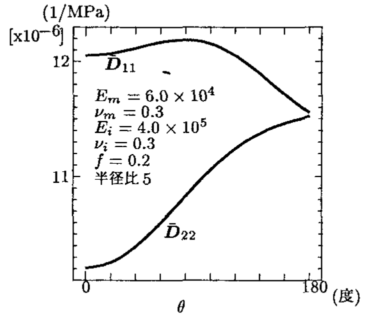
## 3. 介在物の分布と異方性

最も基本的な例として，正方形の領域が周囲で一様な荷重を受けているときの挙動を検討し，本アプローチの特性をまず明らかにする．正方形の領域を400個の定ひずみ三角形要素に分割する．各要素の剛性は式(2)で与えるが，要素毎に介在物の向きを変化させる．楕円柱介在物の半径比を1：5とし，その長軸の向きを**図–1**のように $x_2$ 方向に対して対称にある範囲 $\theta$ の中で乱数で与え，それをランダムに400の要素に割り当てた．つまり，$\theta = 0$度 の場合はすべての介在物の長軸が $x_2$ 方向を向き，$\theta = 180$度 の場合はあらゆる方向にランダムに長軸方向が分布している．

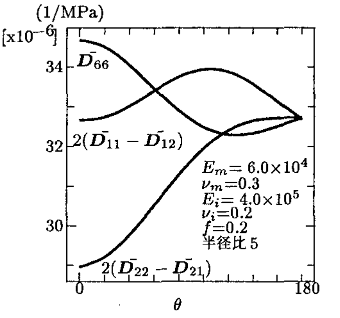
**図–2**に正方形の変形から求まる平均的なコンプライアンス $\bar{\boldsymbol{D}}_{11}$ と $\bar{\boldsymbol{D}}_{22}$ を示した．材料定数は図中に示したとおりである．$\theta = 0$度 の場合はこの2つは同じにならず，直交異方性を明確に示している．$\theta = 180$度 ではこの2つが一致し，対象としている材料がこの $x_1 - x_2$ 平面で等方になっていることを示している．同様に**図–3**は他のコンプライアンス成分を $\theta$ に対して示したものであるが，この場合も $\theta$ が大きくなるにつれて直交異方性が失われ，等方になっている．




**図–1** 長軸方向の分布する範囲




**図–2** 平均弾性係数の変化 1

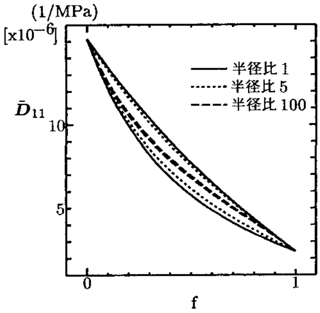



**図–3** 平均弾性係数の変化 2

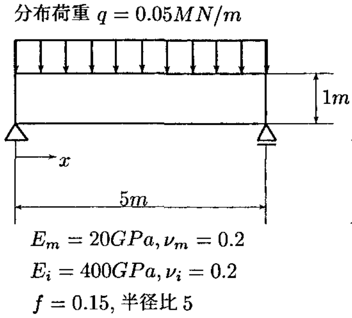
## 4. 上下界の予測

森・田中の手法では，構成材料のうちどちらを母材と選ぶかによって異なる解が得られ，弾性の場合にはその解が Hashin-Shtrikman の上下界に一致することがわかっている．したがって有限要素内で母材と介在物の役割を交代させせることにより，この上下界が求まる．前節において介在物をランダムに並べた場合 ($\theta$ = 180度) のコンプライアンス $\bar{\boldsymbol{D}}_{ij}$ の上下界を求めてみる．複合材料の母材の材料定数は前節と同じにした．楕円介在物の半径比を $1, 5, 100$ とした場合のコンプライアンス $\bar{\boldsymbol{D}}_{11}$ の上下界は**図–4** に示した．$\bar{\boldsymbol{D}}_{11}$，$\bar{\boldsymbol{D}}_{12}$，$\bar{\boldsymbol{D}}_{66}$ の 3 つの係数とも半径比 1 の円柱の場合の上下界内側に位置しており，半径比を $5, 100$ と大きくするにつれて，内側に幅を狭めながら一本の線に収束する．実は森・田中の手法あるいは Hashin-Shtrikman の上下界は，楕円形状が細長くなると近づいてしまう特性を持つ．これが手法の限界とも考えられる．半径比 5 の場合でランダムに分布させた場合は，巨視的には円柱の場合になりそうではあるが，上記のように介在物との相互作用を強めに考慮してしまうためやや内側になっているものと考えられる．

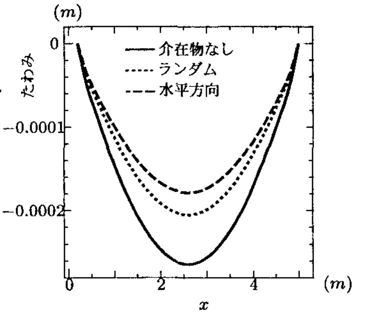
一方で半径比 100 の場合の結果が $f$ の小さい領域でコンプライアンスの下界，つまり森・田中のオリジナルの予測ではない方に漸近しているのは興味深い．$f$ が大きい場合はその逆である．これは Hill の self-consistent と逆の傾向になっている．つまり，オリジナルの森・田中の逆の界の予測とは，かなり介在物同士が同じ体積ひずみだが，密に集まっている等で相互作用が強い場合を解いているのではないかと予測される．




**図–4** $\bar{\boldsymbol{D}}_{11}$ の上下界




**図–5** 解析対象




**図–6** 梁の解析結果

## 5. 境界値問題の例

例として**図–5** に示した，コンクリートを炭素繊維で補強した複合材料を用いた梁の解析を行なった．材料定数，寸法，境界値条件，は図中に示したとおりである．介在物を入れない場合，長軸方向をランダムにして入れた場合，長軸方向を全て水平方向にした場合，の 3 パターン解析し，梁のたわみ量を位置 $x$ の関数で表すと**図–6** のようになった．炭素繊維を入れると剛性は大きくなるが，楕円の長軸方向をランダムに入れるよりも，梁内の応力を考慮して楕円の長軸方向を水平方向に入れたほうが剛性が大きくなっていることがわかる．

## 6. おわりに

森・田中の手法による材料則に従う有限要素の特性を明らかにした上で，炭素繊維補強コンクリートを用いた梁の有限要素解を求め，その可能性を示した．


**参考文献**

1) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
2) 岩熊哲夫・堀　宗朗・森　勉・村外志夫：複合材料の平均的な硬化係数と延性の評価，構造工学論文集，Vol.37A, pp.435–442, 1991.
3) Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related*Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376–396, 1957.