

II-52

打ち切り誤差を利用した新しい波数分散性の計算方法

東北大学大学院工学研究科 学生員 ○嶋原良典

東北大学大学院工学研究科 正員 今村文彦

1. はじめに

現在、波数分散性を考慮した津波を再現する場合は非線形長波理論式に分散項を加えた Boussinesq 方程式を解く方法が一般的である。しかし、この差分は陰解法であり、非常に煩雑な計算であることが知られている。一方、今村・後藤(1986)は遠地津波に関して長波理論で差分計算を行う際、静水深に依存する空間格子間隔 Δx を適当に選ぶことで、数値分散性を物理分散性として再現できることを示している。しかし、地形が複雑な近地においては、適切な Δx がその都度変化してしまうためこの方法の適用は困難である。

そこで本研究では、擬似的に格子間隔を変化させて差分を行うことで、波数分散性を再現する新しい数値計算方法 (Variable Grid System, 以下 VGS) を提案し、線形長波理論への適用の検討を行った。

2. 数値分散と物理分散

簡単のため水平上の線形長波理論による一次元伝播問題を考えると、打ち切り誤差を含んだ擬似微分方程式の第一次近似式は次のように表される。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{c_0^2 \Delta x^2}{12} (1 - K^2) \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

ここで η : 水位, h : 静水深, g : 重力加速度, c_0 : 線形長波の波速 $\sqrt{gh}$, Δx : 空間格子間隔, Δt : 時間格子間隔とし, K は Courant 数であり $K = c_0 \Delta t / \Delta x$ で定義される。一方、物理分散効果を有する線形 Boussinesq 方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{c_0^2 h^2}{3} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0 \quad (2)$$

式 (1) と (2) の比較から、式 (1) の第 3 項は数値分散性を意味していることが判断できる。ここで数値分散性と物理分散性が一致する条件としては、式 (1), (2) の分散項の係数を同じにすればよい。この比を、 Δx について整理すると以下の式が導かれる。

$$\Delta x^* = \sqrt{gh\Delta^2 + 4h^2} \quad (3)$$

よって、式 (3) で定めた空間格子間隔 Δx^* を用い

ることにより、線形長波理論での差分計算で物理的な分散効果を得ることができる。

3. 数値解析方法

式 (3) を実地形に適用する場合、静水深 h は一定でないため、 Δx^* は変化してしまう。そのため、このままでは数値分散性の利用はできない。この解決方法として、本研究では以下に示す計算方法 (VGS) を提案する。

3.1 Variable Grid System による差分の表現

まず、関数 $z(x)$ の微分を差分でおきかえることを考える。Fig.1 に定義した格子の各境界上に、 $z(x)$ に対応した離散値を配置する。一方、点 P を中心として幅 Δx^* の自由に間隔を変えることのできる擬似的な格子を仮定する。この時、擬似格子の境界上での値 z_{j-1}^* , z_{j+1}^* は、本来の境界上の値から補間関数を用いて定める。各々について差分をとると、例えば

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} [z_{j+1} - z_{j-1}] \approx \frac{1}{\Delta x^*} [z_{j+1}^* - z_{j-1}^*] \quad (4)$$

となる。ゆえに基本的な変数の位置を変えずに、擬似的に差分式の計算時の Δx^* を変化させる事が可能となる。

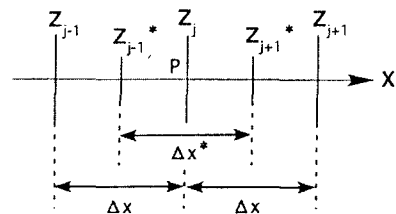


Fig.1 Concept of Variable Grid System

3.2 Leap-frog 差分式への適用

次に、VGS の Leap-frog 差分への適用を考える。連続の式では Fig.2 に示すように、擬似線流量 M^* を補間計算から求める。よって連続の式に関して以下の式が得られる。

$$\eta_{j+1/2}^{n+1/2} = \eta_{j+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x^*} [M_{j+1}^n - M_j^n] \quad (5)$$

また、運動量方程式も同様に、水位 η を補間し擬似水位 η^* を求めることで次式のように書き換えることができる。

$$M_j^{n+1} = M_j^n - g h_j \frac{\Delta t}{\Delta x^*} [\eta_{j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{j-1/2}^{n+1/2}] \quad (6)$$

4. 解析結果と考察

静水深 $h=100\text{m}$ の一次元水平床に、波高 5m の孤立波を伝播させる数値実験を実施した。時間間隔は $\Delta t=5.0\text{sec}$ とし、また空間格子間隔は $\Delta x=400\text{m}$ とした。このとき $\Delta x^*=254\text{m}$ とする。そして、初期変位後 5 分後の空間波形を出力する。比較する結果として、数値解は既往の線形長波理論による結果と、二次の多項式および三次スプライン関数の補間を利用した VGS による修正線形長波理論の結果とした。また、理論解は線形 Boussinesq 方程式を Fourier 変換を利用して解いた。

比較結果を Fig.3, Fig.4 に示す。Fig.3 での二次補間による VGS の結果は、数値分散が大きすぎるため波の概形が大きく変化し、さらに波高の減衰も大きく、理論解と大きく異なっている。一方、Fig.4 において三次スプライン関数で補間した場合は、波の概形と特に波先端部での波高が理論解に近いものになっており、既往の線形長波計算 ($\Delta x=400\text{m}$) による結果よりも精度が高いといえる。ただし、波の後部を見るとまだ若干の振動が残っているため、さらに高次のスプライン補間を施し、計算の精度をさらに上げる必要がある。

5. おわりに

本計算法 (VGS) で線形長波計算を行うことで、数値分散を利用して物理的な分散波を水平床について再現できることが分かった。今後はさらに高次の補間を行い計算の精度を上げ、水深が変化する場合の孤立波の検討を行いたい。

参考文献

- 1) 今村文彦, 後藤智明: 差分法による津波数値計算の打ち切り誤差, 土木学会論文集, 第 375 号/II-6, pp.241-250, 1986 年 11 月。

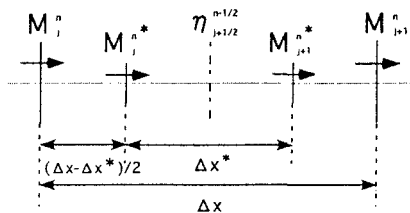


Fig.2 Application of the VGS method to the leap-frog scheme for the Mass conservation equation

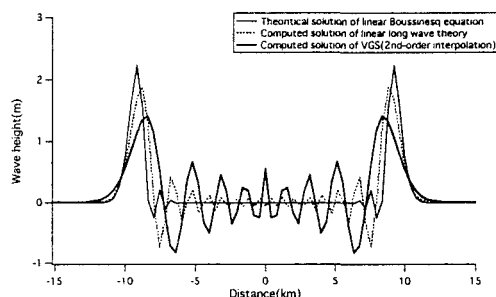


Fig.3 Comparison between the computed result of the VGS method by using 2nd-order interpolation and theoretical solution

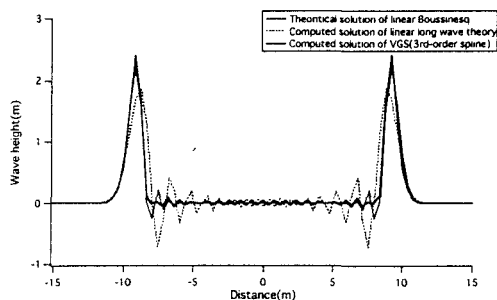


Fig.4 Comparison between the computed result of the VGS method by using 3rd-order spline interpolation and theoretical solution