

II - 3

河床波の遷移過程に関する弱非線型安定解析

東北大学大学院 学生員 ○山口 里実

東北大学大学院 正 員 泉 典洋

1. はじめに

河床形態に関して、流量(または底面剪断力)の小さいうちは河床波が発生するが、ある程度流量が大きくなると河床波は消滅し平坦床となることが知られている^{1), 2)}。また、流量が増加する過程において河床波床から平坦床へ遷移する流量の臨界値のほう、流量が減少する過程で平坦床から河床波床へ遷移する臨界値よりも大きくなることが報告されている³⁾。本研究では、弱非線型安定解析の手法を適用することによって、河床波の遷移過程に見られるヒステリシス現象を説明することを試みる。

2. 弱非線型安定解析

2.1 定式化

図-1 に示すような二次元の開水路流れを考える。流れは二次元レイノルズ方程式及び水面及び底面における境界条件によって決定される⁴⁾。河床高さ $\tilde{h}$ の時間変化は次のようなエクスナー方程式によって表される。

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}} \quad (1)$$

ここで $\tilde{q}$ は流下方向の流砂量である。河床波の非線型性を取り扱う際、有限波高の河床波に対して適応が可能でなければならないため、本研究では、流下方向の河床及び水面勾配を考慮した境界条件及び流砂量公式⁵⁾を適用している。また、水面及び底面において境界条件を与えるために次のような座標変換を導入する。

$$\xi = x, \quad \chi = (y-h)/(\eta-h) \quad (2a, b)$$

上式は次式によって無次元化されている。

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{h}, \tilde{\eta}) = D(x, y, h, \eta) \quad (3)$$

ここで $\tilde{x}$ 及び $\tilde{y}$ はそれぞれ流下方向及び水深方向の座標、 $\tilde{\eta}$ は水面高さ及び D は等流状態での水深である。

2.2 線形安定解析

非線型解析を行う前に、平坦床に対して次式のような振幅 A の微小擾乱を与え、線形安定解析を行う。

$$h = A e^{\Omega t} h_{11} E + c.c. \quad (4)$$

ここで、 $E = \exp[i(k\xi - \omega t)]$ である。 k は擾乱の波数、 Ω は線形増幅率を表し、 ω は位相速度を表す。この線形安定解析より、河床波発生の臨界フルード数 F_c が求められる。その結果、微小振幅に対し、 $F_r < F_c$ の領域では平坦床($\tilde{A} = 0$)は不安定となり、 $F_r > F_c$ の領域では安定とな

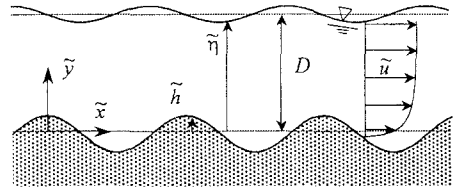


図-1 座標系の概念図

ることが導かれる。

2.3 非線型振幅方程式

弱非線型安定解析では、臨界フルード数 F_c からのわずかなずれを考え、フルード数を次式のように展開する。

$$F_r = F_c - \gamma^2 F_c \quad (5)$$

これに合わせて波数も次のように展開される。

$$k = k_c + \gamma^2 k_1 \quad (6)$$

フルード数の値が F_c では摂動の増幅率はゼロである。 F_c から γ^2 程度だけずれると、摂動の増幅率 Ω も γ^2 程度となるため、非線型性が振幅の時間発展に影響を及ぼすのに、 $\Omega^{-1} \sim O(\gamma^2)$ 程度の時間を要する。したがって時間発展は次のように展開される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad (7)$$

また、式(5)に合わせて次のような摂動展開を導入する。

$$\begin{aligned} h = & \gamma(A h_{11} E + c.c.) \\ & + \gamma^2(A^2 h_{22} E^2 + c.c. + A A^* h_{20}) \\ & + \gamma^3(A^3 h_{33} E^3 + c.c. \\ & + A^2 A^* h_{31} E + c.c. + A h_{30} E + c.c.) \end{aligned} \quad (8)$$

このような展開によって増幅率が展開され、次のような非線型振幅方程式が得られる。

$$dA/dT = \alpha_0 A + \alpha_1 |A|^2 A + \dots \quad (9)$$

ここで α_0 及び α_1 は γ の各オーダーにおいて求められる摂動解によって決定される。

式(9)はランダウ方程式とも呼ばれる。振幅 A が微小な範囲であれば、 A の3次以上の項が無視され、この式は線形振幅方程式となる。このとき α_0 は線形解析における増幅率に相当している。しかし振幅 A が有限な範囲では A の高次項を無視できない。 A の3次の項の係数 α_1 はランダウ係数と呼ばれ、その符号によって振幅解の分岐形態が次のように分類される。 α_1 が負の値であれば、遷移

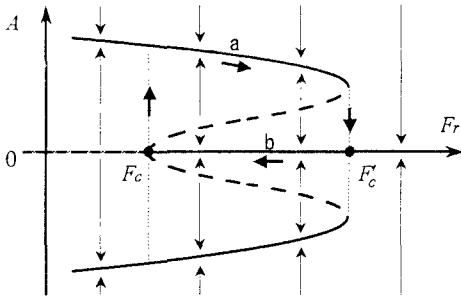


図-2 分岐図 (サブクリティカルバイファケーション)

過程においてスーパークリティカルバイファケーションと呼ばれる分岐形態を有することになる。一方、 α_1 が正の値であれば、サブクリティカルバイファケーションと呼ばれる分岐形態を有することになる。分岐形態がサブクリティカルな場合、図-2に示すように F_c とは異なった臨界点 F_c' が存在することになる。この二つの臨界点(F_c 及び F_c')間において二つの安定した振幅解が存在するため、フルード数が増加する過程では $A=0$ 以外の解が現われるのに対し、フルード数が減少する過程では $A=0$ が解として現われるというヒステリシス現象が生じる。つまり、流量が増加する過程では振幅の解は経路 a に従うためフルード数が F_c' において河床波が消滅することになるが、流量が減少する過程では解は経路 b に従うためフルード数が F_c において河床波が発生することになる。

4. 結果と考察

図-3 に $S=0.003$ 、 $\theta=0.5$ 及び $\mu_c=0.5$ とした場合の本解析の結果を示す。ここで S は河床勾配、 μ_c は砂のクーロン摩擦係数、 θ は限界剪断力及び等流での底面剪断力との比である。破線は線型解析より求められた $\Omega=0$ の中立曲線を示す。太線は弱非線型解析より求められたランダウ係数 α_1 のコンタ図であり、 $\alpha_1=0$ を示している。

図中の破線より臨界フルード数は $F_c=0.65$ 程度であり、その付近では卓越波数が $k=0.4$ 程度であることがわかる。この臨界フルード数付近において α_1 は負の値をとっている。これは卓越波数を有する河床波の遷移過程がスーパークリティカルな分岐形態であり、臨界フルード数 0.65 を超えると河床波は消滅してしまうことを意味している。一方、波数 $k=0.1\sim 0.3$ に対する臨界フルード数 $F_c=0.6$ 付近では α_1 の値は正となり、河床波の遷移過程がサブクリティカルな分岐形態を有することがわかる。このとき河床波は臨界フルード数を超えても消滅しない。

すなわちフルード数が一旦増加して再び減少する過程を考えると、遷移過程に図-2 のようなヒステリシス現象が現

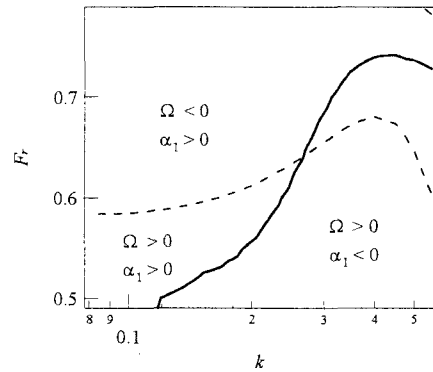


図-3 F_r 及び k による Ω 及び α_1 のコンタ図。

われる可能性があることがわかる。フルード数が増加していく過程では、 $k=0.1\sim 0.3$ の波数を有する河床波は臨界値 $F_c=0.6$ を超えても消滅しないが、 $k=0.4$ 程度の波数を有する河床波は臨界値 $F_c=0.65$ を超えた時点で消滅してしまう。それに対してフルード数が減少していく過程では $F_c=0.65$ を下回ったところで $k=0.4$ 程度の波数を有する河床波がはじめて現われ、 $k=0.1\sim 0.3$ の河床波は $F_c=0.6$ を下回るまで現われないことになる。

5. おわりに

河床波の遷移過程に関して増幅率展開法を用いた弱非線型安定解析を行った。非線型振幅方程式を導き、解の分岐形態を知ることによって遷移過程におけるヒステリシス現象について次の結果を得た。卓越波数を有する河床波は、遷移過程においてスーパークリティカルな分岐形態を有する。一方、卓越波数より小さい波数において、サブクリティカルな分岐形態を有する領域が存在する。この波数を有する河床波は、フルード数が増加する過程において、臨界値を超えても、もう1つ存在する臨界値(F_c')に達するまでは消滅しない。これに対してフルード数が減少する過程では、臨界フルード数を下回ったところで卓越波数を有する河床波がはじめて現われることになる。

参考文献：

- 1) Englund, F.: Instability of erodible beds, *J. Fluid Mech.*, 42, 225-244, 1970.
- 2) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channels, *J. Fluid Mech.*, 64, 1-16, 1974.
- 3) 石川忠晴：利根川・江戸川の河道程度係数について，土木研究所資料，第1943号，46，1983-3.
- 4) 山口里実，泉 典彦：侵食性河床におけるステップ発生の線形安定性理論，水工学論文集，第45巻，pp.751-756，2001.
- 5) Kovacs, A. and Parker, G.: A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channel, *J. Fluid Mech.*, Vol. 267, pp. 153 - 183, 1994.