

I - 26

多孔質弾性体中の波動伝播特性の解析

○東北大学 工学研究科 学生員 岡田 俊明
東北大学 工学研究科 正 員 山本 晃司
東北大学 工学研究科 正 員 北原 道弘

1. はじめに

固体粒子と間隙流体からなる多孔質体としての性質を持つ物質の波動伝播特性について、Biot がモデル化した多孔質弾性体の構成則と運動方程式に基づき^{1),2)}、多孔質弾性パラメータが横波、縦波高速成分、縦波低速成分のそれぞれの波動伝播特性に与える影響について考える。また、三次元の基本解を求め、散逸パラメータの効果を明らかにする。

2. Biot の多孔質弾性体における波動伝播

2.1 Biot の多孔質弾性体と構成則

Biot(1956)に基づいて、孔隙サイズに比べて十分波長の長い弾性波の伝播を考える。流体で飽和した多孔質弾性体は、固体の骨格部分と流体からなっていて、流体は孔隙の間を移動できると考える。

多孔質弾性体に生じる変位とひずみは固体骨格部分と流体部分にわけて定義する。粒子骨格部分の変位を $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 、流体の変形を $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ とする。粒子骨格部に関するひずみ-変位関係は、

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$e = e_{kk} = u_{k,k} \quad (1)$$

で表される。ここで e_{ij} は固体のひずみである。流体と固体の相対変形 $w_i = \beta(U_i - u_i)$ を考え、粒子骨格部から出入りする流体の量 q を、流体変位と固体変位の差 w_i と孔隙率 β から、

$$q = -w_{k,k} \quad (2)$$

と表す。

Biot の多孔質弾性体の構成式には非排水条件の粒子骨格部の Lamé の定数 λ_u, μ 、及び流体との連成パラメータ α, M の四つの弾性係数が関係し、

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \{(\lambda_u - \alpha^2 M)e - \alpha p\} \delta_{ij} \quad (3)$$

$$p = -\alpha M e + M \zeta \quad (4)$$

となる。ここで、 σ_{ij} は全応力、 p は間隙圧力である。

2.2 運動方程式と特性方程式

粒子骨格部を出入りする流体は Darcy 則 $\dot{w}_i = \frac{k}{\eta} p_{,i}$ に従う。ここで、 k は浸透率 [L^2]、 η は流体の粘性係数 [$ML^{-1}T^{-1}$] を表す。運動方程式は、

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i - \rho_f \ddot{w}_i + b_i \quad (5)$$

$$p_{,i} = -\rho_f \ddot{u}_i + \frac{\rho_f}{\beta} \ddot{w}_i + \frac{\eta}{k} \dot{w}_i + Q \quad (6)$$

と表される。ここで、 ρ と ρ_f は飽和した多孔質体及び流体の質量密度、 b_i は単位体積に働く物体力、 Q は流体のソースを表す。角振動数を ω とする調和波の伝播問題を考え、 $b_i = Q = 0$ とすると、運動方程式 (5) と (6) は次のように書ける。

$$\sigma_{ij,j} = -\omega^2(\rho u_i - \rho_f w_i) \quad (7)$$

$$p_{,i} = \omega^2(\rho_f u_i - \tilde{m} w_i) \quad (8)$$

ここで、 $\tilde{m}$ は散逸を考慮した質量パラメータ $\tilde{m} = m + i\frac{\eta}{\omega} \frac{1}{k}$ 、 $m = \rho_f/\beta$ である。これに、(1)、(2)、(3)、及び (4) を代入して、応力 σ_{ij} 及び相対変位 q を消去すると、独立な変数を粒子骨格部の変位 u_i と流体の圧力 p とする運動方程式を得る。

$$\mu u_{i,jj} + (H' - \mu) u_{j,ji} + \omega^2 \hat{\rho} u_i - \hat{\alpha} p_i = 0 \quad (9)$$

$$\hat{\alpha} u_{i,i} + \frac{1}{\omega^2 \tilde{m}} p_{,ii} + \frac{1}{M} p = 0 \quad (10)$$

ここで、 $H' = \lambda_u + 2\mu - \alpha^2 M$ 、 $\hat{\rho} = \rho - \rho_f^2/\tilde{m}$ 、 $\hat{\alpha} = \alpha - \rho_f/\tilde{m}$ である。

平面進行波の問題を考えて、横波及び縦波それぞれについて特性方程式を立てると次のようになる。

横波：

$$-\mu k^2 + \omega^2 \hat{\rho} = 0 \quad (11)$$

縦波：

$$(H' k^2 - \hat{\rho} \omega^2) A_i + i k \hat{\alpha} B = 0$$

$$i k \hat{\alpha} A_i - \left(\frac{k^2}{\omega^2 \tilde{m}} - \frac{1}{M} \right) B = 0 \quad (12)$$

ここで、 A_i, B は固体変位及び流体圧力の振幅を示す。横波の波数を k_T とすると、

$$k_T^2 = \frac{\hat{\rho}}{\mu} \omega^2 \quad (13)$$

が得られる。また、縦波について任意の A_i, B に対して式 (12) が成り立つ条件として、

$$k^2 = \frac{1}{2} \left[(k_{L0}^2 + k_{F0}^2 + k_Q^2) \right. \\ \left. \pm \left\{ (k_{L0}^2 + k_{F0}^2 + k_Q^2)^2 - 4k_{L0}^2 k_{F0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (14)$$

が得られる。ここで、

$$k_{L0}^2 = \omega^2/H' \cdot \hat{\rho} \quad (15)$$

$$k_{F0}^2 = \omega^2 \tilde{m}/M \quad (16)$$

$$k_Q^2 = \omega^2 \tilde{m}/H' \cdot \hat{\alpha}^2 \quad (17)$$

であり、(14) の二根のうち高速成分を k_F 、低速成分を k_L とする。

3. 基本解

基本解 $G_{LM}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、式 (9) と (10) より、次式を満たす解として定義される。

$$L_{KL} G_{LM}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{KM} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (18)$$

ここで一般化変位 q_K ($K = 1, 2, 3, 4$) は、 $q_i = u_i$ ($i = 1, 2, 3$)、 $q_4 = p$ であり、微分作用素 L_{KL} は次のようである。

$$L_{ij} = \mu \delta_{ij} \Delta + H' \partial_i \partial_j + \omega^2 \hat{\rho}$$

$$L_{i4} = -\hat{\alpha} \partial_i$$

$$L_{4i} = -L_{i4}$$

$$L_{44} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{m}} \Delta + \frac{1}{M} \quad (19)$$

Fourier 変換を用いて、 G_{LM} を導出すると、次のようになる。

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{e^{ik_T r}}{r} \delta_{ij} - K^{LF} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[K^{TF} L^F \left(\frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_F r}}{r} \right) - K^{TL} L^L \left(\frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right) \right] \right)$$

$$G_{i4} = -\frac{ik_Q^2}{4\pi\alpha} K^{LF} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{e^{ik_L r}}{r} - \frac{e^{ik_F r}}{r} \right)$$

$$G_{i4} = \frac{ik_Q^2}{4\pi\alpha} K^{LF} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{e^{ik_L r}}{r} - \frac{e^{ik_F r}}{r} \right)$$

$$G_{44} = \frac{M}{4\pi} k_{F0}^2 K^{LF} \left\{ (k_{L0}^2 - k_F^2) \frac{e^{ik_F r}}{r} - (k_{L0}^2 - k_L^2) \frac{e^{ik_L r}}{r} \right\} \quad (20)$$

ここで $K^{pq} = 1/(k_p^2 - k_q^2)$,
 $L^p = \{(H' - \mu)/H'\} (k_{F0}^2 - k_p^2) + k_Q^2$ である。

4. 波動伝播特性と多孔質弾性パラメータ

4.1 多孔質弾性パラメータと波数の関係

連成に関する弾性パラメータ α 及び M が横波、縦波低速成分、縦波高速成分それぞれの波数 (k_T , k_L , k_F) にどのように影響を与えるかを図 1 に示す。ここで横軸は排水条件と非排水条件の体積弾性係数の差に対応する $\alpha^2 M$ を $\lambda + 2\mu$ ($\mu = 2\lambda$) で規格化した値であり、縦軸は流体が含まれない状態の骨格部の縦波波数 $k_L(d)$ で規格化した各波数の値を示す。ここで、孔隙率 $\beta = 0.2$ 、骨格部と流体の密度比は $\rho : \rho_f = 2.5 : 1$ とした。また、ここでは散逸は考慮していない。

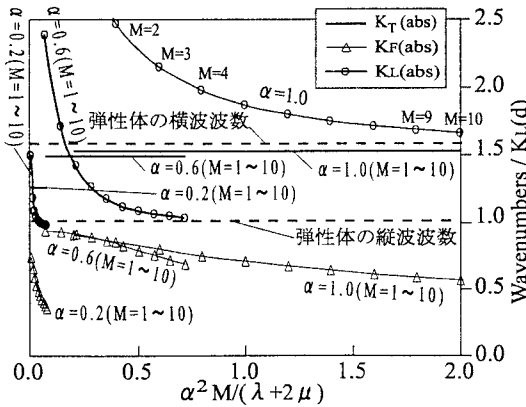


図 1 連成パラメータ M, α と波数の関係 (散逸の考慮はなく、 $\beta=0.2$, $\mu=2\lambda$, $\rho=2.5\rho_f$ とする)

4.2 固体と流体の連成への散逸の影響

流体の圧力が固体の変位を引き起こす連成現象への散逸の影響を調べるため、式 (20) で示される基本解のうち $G_{14}(\mathbf{x}, \mathbf{o})$ を $x_1 - x_2$ 平面上で図化してみる。

この $G_{14}(\mathbf{x}, \mathbf{o})$ は座標原点に単位流量の流体のソースが点波源として作用した場合の $x_1 - x_2$ 平面上の x_1 方向の固体の変位を意味している。ここでは、散逸を考慮しない場合 (図 2: 散逸パラメータ $\eta = 0$) と散逸を考慮した場合 (図 3: 散逸パラメータ $\eta = 1.0 \times 10^{-3}$ [Pa·sec]) のそれぞれについて示す。弾性パラメータとして砂岩の物性値を用い、 $\lambda = 4.0$ GPa, $\mu = 6.0$ GPa, $\alpha = 0.79$, $M = 12.6$ GPa, $\beta = 0.19$, $\rho = 3000$ kg/m³, $k = 1.9 \times 10^{-13}$ m² とし、角振動数は 1.0×10^6 rad/sec としている。散逸を考慮した場合には、低速の縦波に関係する成分が急速に減衰することがわかる。

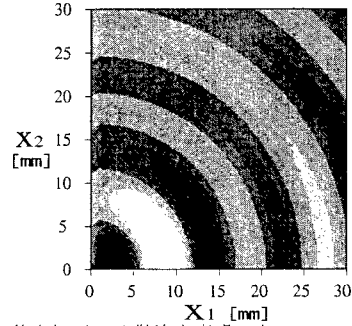


図 2 基本解 G_{14} (散逸を考慮しない, $\eta = 0$)

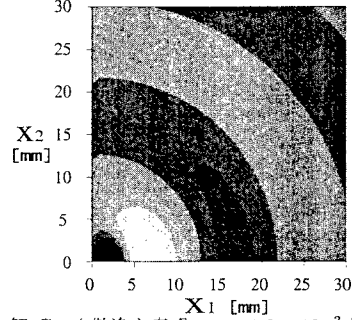


図 3 基本解 G_{14} (散逸を考慮, $\eta = 1.0 \times 10^{-3}$ [Pa·sec])

5. まとめ

横波、縦波低速成分、縦波高速成分の波数の多孔質弾性パラメータによる変化を、排水条件と非排水条件の体積弾性係数の差に対応するパラメータ $\alpha^2 M$ に着目して整理した。また、基本解を求めて、単位流量の流体のソースに対する変位の応答を示した。

縦波の高速成分の速度は排水条件における弾性体の縦波速度よりも速く、 $\alpha^2 M$ の値が 0 に近いほうが弾性体の波速に近くなる。一方、縦波の低速成分は $\alpha^2 M$ が 0 に近づくとも急速に遅くなる。また、波動伝播には散逸の影響が大きいことがわかった。

参考文献

- 1) Biot, M. A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range, J. Acoust. Soc. Am., 28, 168-178, 1956
- 2) Biot, M. A. and Willis, D. G., The elastic coefficients of the theory of consolidation, J. Appl. Mech., 24, 594-601, 1957