

I - 23

FFT を用いた逆散乱解析の高速化について

○東北大学大学院 学生員 中畑和之
東北大学大学院 正 員 北原道弘

1. はじめに

構造部材の欠陥形状を再構成する線形化逆散乱解析法¹⁾の基本アルゴリズムは、散乱波形が有する位相情報保持しながら波数ベクトル空間内で積分をすることである。本研究ではこの逆散乱アルゴリズムとフーリエ変換との相似性に着目し、FFT を利用した逆散乱解析の高速化を試みる。

2. 線形化逆散乱法

均質等方な2次元弾性体 D 内に空洞 D^c が存在しているものとする。測定境界面上に設置した探触子によって縦波入射波 u^0 を送信し、欠陥空洞 D^c によって散乱された散乱波 u^{sc} を同じ位置の探触子で受信し、この散乱波から逆に欠陥の形状を推定する。ここでは散乱波 u^{sc} の縦波成分から探触子方向 $\hat{y}$ の縦波散乱振幅 $A(k_L, \hat{y}) \cdot \hat{y}$ を抽出することにより、この縦波散乱振幅から逆に材料内部の欠陥形状を推定する逆問題として以下のように定式化される。

2.1 ボルン逆解析

固体内への超音波の入射波は、近似的に平面縦波であると仮定する。ボルン近似を導入すれば散乱波の計測点における縦波成分の散乱振幅は次のようになる。

$$A(k_L, \hat{y}) = i \frac{u^0 k_L^2}{2} \hat{y} \int_D \Gamma(x) e^{-2ik_L \hat{y} \cdot x} dV(x) \quad (1)$$

ここで u^0 は入射波の振幅、 k_L は縦波波数であり、 $\Gamma(x)$ は欠陥内部で値を有する特性関数である。いま、 $K = 2k_L \hat{y}$ と定義すると、上式右辺の積分は、特性関数 $\Gamma(x)$ の K -空間におけるフーリエ変換像であることがわかる。従って、欠陥の位置と形状を表す特性関数 $\Gamma(x)$ は散乱振幅 $A(k_L, \hat{y})$ の逆フーリエ変換として次のように求めることができる。

$$\Gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{-8i}{u^0 k_L^2} A(k_L, \hat{y}) e^{2ik_L \hat{y} \cdot x} k_L dk_L d\hat{y} \quad (2)$$

ここで $A(k_L, \hat{y}) = A(k_L, \hat{y}) \cdot \hat{y}$ であり、図-1において K -空間の原点を通る放射線(実線)上に分布する。

2.2 キルヒホフ逆解析

キルヒホフ近似を導入して線形化した縦波の散乱振幅は次式で表される。

$$A(k_L, \hat{y}) = -\frac{u^0 k_L}{2} \hat{y} \int_D \gamma(x) e^{-2ik_L \hat{y} \cdot x} dV(x) \quad (3)$$

ここで $\gamma(x)$ は特異関数と呼ばれ、入射波が直接到達する境界部分のみで値をもつ関数である。特異関数 $\gamma(x)$ も K -空間の逆フーリエ変換により再構成される。

$$\gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{-8}{u^0 k_L} A(k_L, \hat{y}) e^{2ik_L \hat{y} \cdot x} k_L dk_L d\hat{y} \quad (4)$$

式(2)と式(4)は、計測された縦波散乱振幅 $A(k_L, \hat{y})$ を用いて、 K -空間における積分を実行することで欠

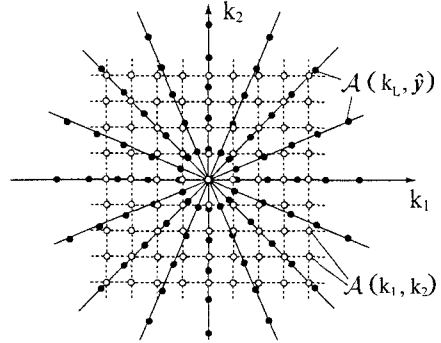


図-1 K -空間における計測値 $A(\bullet)$ とその補間点 $(\circ)$

陥形状が再構成できることを示している。ここでは、この逆解析アルゴリズムがフーリエ変換(FT)に基づくものであることに着目し、離散フーリエ変換(DFT)を用いた数値解法を示し、DFTを高速実行する高速フーリエ変換(FFT)を利用することで、逆解析の実行時間の効率化を図る。

3. 離散フーリエ変換

3.1 離散化

形状再構成式(2)および(4)を離散化する手順は同じであるので、以下キルヒホフ逆解析を例に述べる。まず K -空間の極座標系 $(2k_L, \hat{y})$ を直角座標系 (k_1, k_2) に変換すると式(4)は

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \tilde{A}(k_1, k_2) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dk_1 dk_2 \quad (5)$$

と表される。ここで、

$$\tilde{A}(k_1, k_2) = \frac{-4}{u^0 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} A(k_1, k_2). \quad (6)$$

次に離散化の便宜上 $k_1 = 2\pi k'_1, k_2 = 2\pi k'_2$ として式(6)を次式のように書き換える。

$$\gamma(x_1, x_2) = \iint \tilde{A}(k'_1, k'_2) e^{i2\pi k'_1 x_1} e^{i2\pi k'_2 x_2} dk'_1 dk'_2 \quad (7)$$

以上の逆フーリエ変換は再構成領域 (x_1, x_2) および、 K -空間 (k_1, k_2) において全範囲を解析領域とするが、離散フーリエ変換は周期関数の1周期分に相当する有限な範囲の離散データを用いる。実際の計測データ $A(k_L, \hat{y})$ は、図-1において黒丸●で示される離散点に分布する。離散フーリエ変換を用いるために、図-1に白丸○で示されるような格子点での離散データ $A(k_1, k_2)$ が必要である。実際に求められている黒丸点のデータから、計算に必要な白丸点のデータは内挿法を用いて補間する。ここで K -空間において $N_1 \times N_2$ のデータをサンプリングするとすれば、 K -空間の離

散データ $\tilde{A}(m_1, m_2)$ に対する再構成領域 $\gamma(n_1, n_2)$ は、式 (7) の 2 次元 FT に対応して次式の 2 次元 DFT によって求めることができる。

$$\gamma(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{A}(m_1, m_2) W_{N_1}^{n_1 m_1} W_{N_2}^{n_2 m_2} \quad (0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1) \quad (8)$$

ここで、 $W_{N_1} = \exp(2\pi i/N_1)$ 、 $W_{N_2} = \exp(2\pi i/N_2)$ であり、 N_1, N_2 は FFT の高速化の制約から 2 のべき乗が採用される。

いま、 K -空間のサンプリング間隔を Δk 、最高波数を k_{max} とすると、再構成領域の間隔 Δx とは

$$\Delta x_\alpha = \frac{2\pi}{N_\alpha \cdot \Delta k_\alpha} = \frac{2\pi}{2k_{max}} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (9)$$

の関係がある。上式中の 2π は、式 (7) で $k = 2\pi k'$ と置いたことに起因する。 k_{max} が大きい、すなわち広帯域の計測データを用いて逆解析することは、再構成領域の空間分解能が向上することを意味している。以下では、この 2 次元 DFT を高速に実行するための 2 次元 FFT について述べる。

3.2 2次元高速フーリエ変換

式 (8) で示される 2 次元 DFT の m_1 および m_2 方向に着目すると、2 次元 DFT を 1 次元 DFT の繰り返しと解釈することができる。この性質に基づき、ここでは 1 次元 FFT を繰り返し使用して 2 次元 FFT を構成した行-列分解法²⁾を採用する。まず、式 (8) は次式のように書き直すことができる。

$$\gamma(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \left[\frac{1}{N_2} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{A}(m_1, m_2) W_{N_2}^{n_2 m_2} \right] W_{N_1}^{n_1 m_1} \quad (0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1) \quad (10)$$

ここで上式の右辺の括弧内は、 m_1 固定の下では $n_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ に対する 1 次元 DFT と解釈することができる。いま、これを

$$\tilde{B}(m_1, n_2) = \frac{1}{N_2} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{A}(m_1, m_2) W_{N_2}^{n_2 m_2} \quad (11)$$

とおくと、2 次元 DFT は次式のように表される。

$$\gamma(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \tilde{B}(m_1, n_2) W_{N_1}^{n_1 m_1} \quad (12)$$

以上の計算は、初めに 1 次元の N_2 点 DFT を各 m_1 に対して合計 N_1 回計算し、 $\tilde{B}(m_1, n_2)$ を求めた後、求められた $\tilde{B}(m_1, n_2)$ を用いて 1 次元の N_1 点 DFT を各 n_2 に対して合計 N_2 回計算する。このように 2 次元 DFT を 1 次元 DFT の計算に帰着させた後、この 1 次元 DFT を 1 次元 FFT アルゴリズムに基づいて計算する。

4. 逆解析手順

図-2に縦波散乱振幅 $A(k_L, \hat{y})$ から欠陥の再構成像への変換手順を示す。図-2(a)は計測された散乱振幅の K -空間の配置 $\tilde{A}(k_1, k_2)$ を表している。この配置では四隅に高周波成分が分布し、低周波成分は中心に

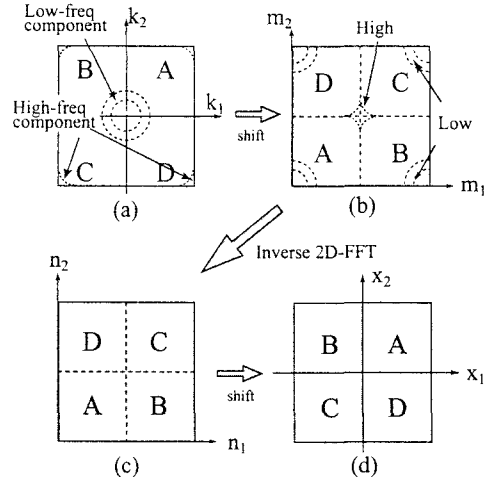


図-2 2次元 FFT を用いた K -空間からの再構成手順

配置される。ここで離散化の際の折り返し波数³⁾の発生を考慮して、原点を折り返し波数の位置にとって、正負の波数空間成分が連続するように配置を入れ替える(図-2(b))。その後、3.2で示した 2 次元 FFT を実行すると、再構成領域における配置 $\gamma(n_1, n_2)$ を得る(図-2(c))。さらにこの配置の順序を元に戻すと欠陥像 $\gamma(x_1, x_2)$ が再構成される(図-2(d))。

5. 欠陥の再構成結果

2 次元 FFT を用いて、計測波形から欠陥像を再構成した結果を図-3に示す。欠陥再構成像は、使用周波数(波数)が高いほど鮮明であることがわかる。

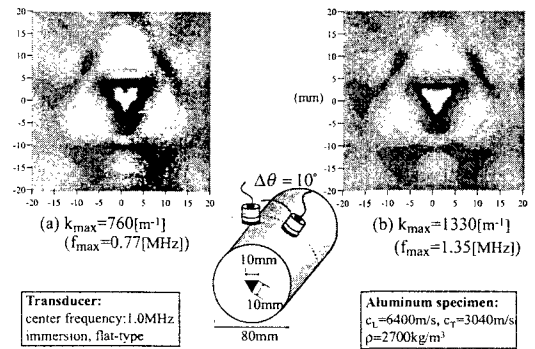


図-3 キルヒホフ逆解析による欠陥像の再構成

参考文献

- 1) 中畑和之、北原道弘: 計測波形による欠陥形状の再生と使用周波数帯域に関する考察、応用力学論文集、3、91-98(2000)。
- 2) 佐川雅彦、貴家仁志: 高速フーリエ変換とその応用、昭晃堂(1992)。
- 3) 谷口慶治 編: 画像処理工学 基礎編、共立出版(1996)。