

I - 39

アーチ構造の形状最適化に関する研究

岩手大学工学部 学生会員 ○金 英達

正会員 宮本 裕 岩崎 正二

1. まえがき

アーチのように無柱で大空間を覆う構造物において、その幾何学的形状は力学的に合理的であることが要求される。アーチは、作用外力を主に面内断面力により支持基盤に伝達するという力学特性を持っている。これはアーチが大空間の無柱化を可能とする力学的な理由であり、この機構をうまくとらえて設計された構造物が力学的合理性を備えたものとなる。この種の構造物は“形態抵抗構造”とも呼ばれる。本論文の目的は、設計の初期段階で採用される設計用原型アーチを、どのような観点から、どのような方法により最適化するかを提案し、数値解析例を通して提案する手法の有効性を示すことである。本論文で提案する最適化手法を用いると、設計者は簡単にアーチ構造の最適形状を求めることができるので、設計業務が大いに軽減されるものと考えられる。

2. 解析理論

円弧アーチ構造物を具体例として取り上げ、アーチ全体のひずみエネルギーを直接極小化する考え方を提案する。目的関数を曲げ変形と軸方向変形によるアーチ全体のひずみエネルギーとし、設計変数をアーチの幾何特性（円形の場合は半径と円心角度）とする。幾何学的な拘束条件としてアーチの幅と高さを制約する設計条件を考慮し、力学的な拘束条件は釣り合い方程式を考慮する。この問題は、非線形計画問題として考えることができるので、逐次二次非線形計画法を用いて解析する。

解析例として、分布荷重と集中荷重の場合の2ヒンジ等断面同材質の円弧アーチの最適形状をそれぞれ求めるが、最適化問題の定式化は次のようになる。

① 分布荷重が作用する場合(図1)

幾何学的な拘束条件：

$$\left. \begin{aligned} L_{\min} &\leq L \leq L_{\max} \\ T_{\min} &\leq T \leq T_{\max} \\ 0 &\leq \theta_0 \leq \pi/2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

のもとで、曲げ変形によるひずみエネルギー U_b と軸方向変形によるひずみエネルギー U_n の合計 U が最小になると共に、アーチに囲まれた部分の面積 S が最大になる円弧アーチの半径 R と円心角度 θ_0 を求める。すなわち、

目的関数： $OBJ=U/S=(U_b+U_n)/S$

ここで、 $U=U_b+U_n$

$$= \int_0^L \frac{M^2}{EI} ds + \int_0^L \frac{N^2}{EA} ds$$

$$S = \theta_0 R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin(2\theta_0)$$

設計変数： R, θ_0

② 集中荷重が作用する場合(図2)

幾何学的な拘束条件式(1)のもとで、曲げ変形によるひずみエネルギーと軸方向変形によるひずみエネルギー

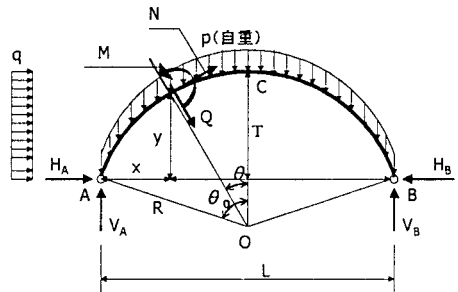


図1 分布荷重を受ける2ヒンジ円弧アーチのモデル図

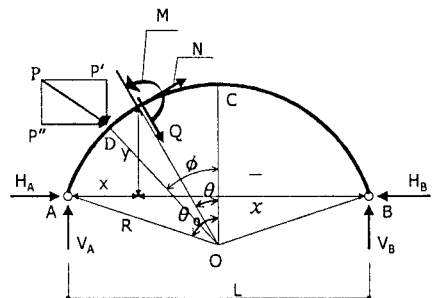


図2 集中荷重を受ける2ヒンジ円弧アーチのモデル図

一の合計Uが最小になる円弧アーチの半径R、円心角度 θ_0 と集中荷重の作用位置 ϕ を求める。すなわち、

目的関数： $OBJ=U=U_b+U_n=\int_0^L \frac{M^2}{EI} ds + \int_0^L \frac{N^2}{EA} ds$ 、 設計変数： R、 θ_0 、 ϕ

①と②の目的関数の断面内力MとNは、「土木学会構造力学公式集」¹⁾より計算し、積分は、アーチを軸方向に20等分をして、各断面の断面力を求め、和式で近似する。

上記の非線形制約付き最適化問題に対し、本研究は現在最も有効な方法の一つとされている逐次2次計画法(SQP法)²⁾を用いて計算する。

3. 数値解析結果

数値解析例として、本研究では2ヒンジ円弧アーチを取り上げる。数値計算に用いた数値は、

$E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $I=5190 \text{ cm}^4$ 、 $A=48.8 \text{ cm}^2$ 、

$p=30 \text{ kgf/cm}$ 、 $q=150 \text{ kgf/cm}$ 、 $P'=300 \text{ kgf}$ 、 $P''=200 \text{ kgf}$

とする。拘束条件として、

$200 \text{ cm} \leq L \leq 400 \text{ cm}$ 、 $100 \text{ cm} \leq T \leq 200 \text{ cm}$

とし、初期形状は、

$R=300 \text{ cm}$ 、 $\theta_0=1$

の円弧アーチにする。

解析結果は表1のようになる。図3はアーチが最適化された過程を示している。分布荷重を受ける場合の目的関数の収束状態は図4に表され、初期形状と最適形状の断面曲げモーメントは図5に表されている。

表1 解析結果

設計変数	分布荷重の場合	集中荷重の場合
R (cm)	231.76388	249.99999
θ_0	1.04877	0.92730
ϕ		0.55231

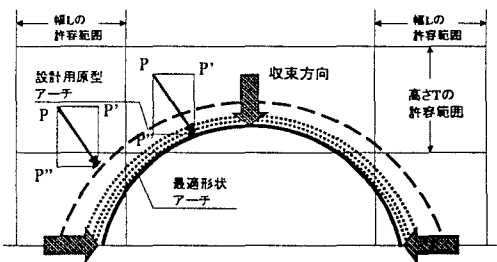


図3 最適化過程のイメージ図

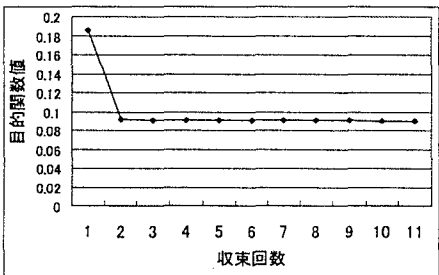


図4 分布荷重を受ける場合の目的関数の収束状況

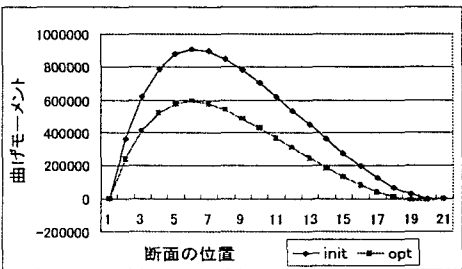


図5 初期形状と最適形状の断面曲げモーメント

4. まとめ

解析結果より、次のことが明らかになった：

- (1) 分布荷重と集中荷重に関わらず、最適形状の幅Lは設計条件の許容範囲内の最も下限になる傾向がある。
- (2) 最適形状の各断面の曲げモーメントは初期形状より著しく減少した。しかし、最適形状の各断面の軸力とせん断力は、初期形状のそれぞれの断面力とほとんど変わらなかった。

本研究は、2ヒンジ円弧アーチを取り上げ、幅と高さの制限条件のもとで、アーチ全体のひずみエネルギーが最小になる最適アーチ形状を求めたところ、初期形状と比較して、ひずみエネルギーと断面力の分布状況が大幅に改善されることがわかった。今後の課題としては、本手法をFEM等の構造解析手法を取り込むことにより、シェル構造等の3次元構造物の形状最適化問題の解法に拡張することである。

参考文献：

- 1) 茨木俊秀、福島雅夫：FORTRAN77 最適化プログラミング、岩波書店、pp.167～pp.207、1991年
- 2) 構造力学公式集、土木学会、pp.237～pp.272、昭和61年版