

I-30 アレー状球形散乱体による平面波の反射・透過特性

○東北大学 工学研究科 学生員 山田 将紀
 東北大学 工学研究科 正 員 北原 道弘

1. はじめに

球形散乱体が平面アレー的に周期分布した場合の散乱問題に対して、基本解を Ewald¹⁾ の方法により二重級数和の収束性を高速化し、高速収束型基本解を用いて積分方程式の結果が数値解析的に十分な収束性と精度が得られることを著者らの研究²⁾ によって示した。本論文は、アレー状球形散乱体の散乱問題について、反射波・透過波の振幅に当たる反射率・透過率を数値解析的に決定する方法を示し、その結果の精度を確認する。

2. アレー状球形散乱体による反射・透過問題

解析対象とするアレー状球形散乱体を図1に示す。ここでは、 $x_1 - x_2$ 平面上に中心を有する無限個の球形散乱体が x_1 軸と x_2 軸に沿って周期的に存在している二重周期構造の場合を考えており、 x_1 軸に沿う各球の中心間距離が b 、 x_2 軸に沿う中心間距離が c である。また、これら全ての球の半径は等しく a とする。

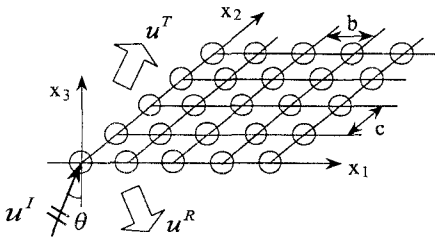


図1 アレー状球形散乱体の配置

本論文では、スカラー場に関する三次元波動問題を考える。このとき、波動場 u は次のヘルムホルツ方程式を満足する。

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (1)$$

ここに、 k は波数である。各球面上の境界条件として、ノイマン条件 ($\partial u / \partial n = 0$) が与えられている場合を考える。入射波は $x_1 - x_3$ 平面内に伝播ベクトルをもち x_3 軸との角度が θ である次のような平面波とする。

$$u^I(\mathbf{x}) = e^{ik(\sin \theta x_1 + \cos \theta x_3)} \quad (2)$$

3. 散乱場の表現

アレー状球形散乱体による散乱問題において、全波動場 u は入射波 u^I と散乱波 u^S の重ね合わせとして次のように書ける。

$$u = u^I + u^S \quad (3)$$

入射波の伝播ベクトルは $x_1 - x_3$ 平面内にあり、球形散乱体は x_1 軸に沿って無限個配置されているため、散乱波 u^S は入射波の位相 $\exp(ikp_1 x_1) = \exp(ikx_1 \sin \theta)$ と同じ位相構造を有す。境界条件のノイマン条件と散乱体の二重周期性より、散乱波 u^S をフーリエ級数で表現すると次のようになる。

$$u^S(\mathbf{x}) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \Phi_{\pm}^{pq} e^{i(\alpha_p x_1 + \beta_q x_2 \pm \gamma_{pq} x_3)} \quad (4)$$

ここで、 $\Phi_{\pm}^{pq}$ と $\Phi_{\mp}^{pq}$ はそれぞれ $x_3 > 0$ と $x_3 < 0$ に対応した係数である。また p, q は整数として、 $\alpha_p, \beta_q, \gamma_{pq}$ は次のようになる。

$$\alpha_p = k \sin \theta + 2p\pi/b, \quad \beta_q = 2q\pi/c$$

$$\gamma_{pq} = [k^2 - (\alpha_p)^2 - (\beta_q)^2]^{1/2} \quad (5)$$

式(4)と(5)の各項が波の各波動モードに対応しており、 $+\gamma_{pq}$ は透過波を、 $-\gamma_{pq}$ は反射波を表している。 $p = q = 0$ のときは γ_{pq} が実数値となり、式(4)は伝播する波を表す。また $p = q = 0$ 以外のときは、波数 k が

$$k = \omega/c = \min[(\alpha_p)^2 + (\beta_q)^2]^{1/2} \quad (6)$$

より小さい場合は、 $(0, 0)$ モードの波動だけが伝播波となり、それ以外の波は γ_{pq} が虚数になり、 $|x_3|$ の値が大きくなるに従って減衰する。それぞれの波動モードは伝播波として存在し得る限界のカットオフ波数を有しており、波数 k が式(6)よりも増加すると、次のモードの波が伝播波となる。

4. 反射率と透過率の導出

式(3)と式(4)から $x_3 > 0$ における全波動場 u_+ と $x_3 < 0$ における全波動場 u_- は次のように書ける。

$$u_+ = e^{ik\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + \sum_p \sum_q \Phi_+^{pq} e^{i(\alpha_p x_1 + \beta_q x_2 + \gamma_{pq} x_3)} \quad (7)$$

$$u_- = e^{ik\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + \sum_p \sum_q \Phi_-^{pq} e^{i(\alpha_p x_1 + \beta_q x_2 - \gamma_{pq} x_3)} \quad (8)$$

ここで、 $u_+(\mathbf{x})$ は透過波、 $u_-(\mathbf{x})$ は反射波を表している。また、 Φ_+^{pq} と Φ_-^{pq} が (p, q) 次の波動モードの透過率・反射率となる。ここで、内部に欠陥を1つだけ含む基本ユニットセルを考え、式(7)と(8)中の係数 Φ_+^{pq} と Φ_-^{pq} を決めるために相反定理を活用する。物体力が作用しない場を考えると、相反定理は次のようになる。

$$\int_S (u^B \frac{\partial u^A}{\partial n} - u^A \frac{\partial u^B}{\partial n}) dS = 0 \quad (9)$$

上式中の S は、球形散乱体の表面とユニットセルの立方体の表面である。

$$S = S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S^{00} \quad (10)$$

ここに、 $S_i^+, S_i^- (i = 1, 2, 3)$ はユニットセルの $x_i -$ 座標に関する正と負の表面を表しており、 S^{00} はユニットセル内の球形散乱体の表面である。

相反定理(9)中の状態 A として式(7)、(8)に示した実際の波動場を考え、状態 B として、次の仮想系を考える。

$$u_{\pm}^{Bpq} = -e^{-i(\alpha_p x_1 + \beta_q x_2 \pm \gamma_{pq} x_3)} \quad (11)$$

この仮想系は (p, q) モードの反射波・透過波と逆位相をもち逆方向に伝播する波となるように選ばれている。この2つの系を式(9)の相反定理に適用すると、 S_1^+

および S_2^+ 上の積分は零となり、 S_3^+ と S^{00} 上の積分が残る。ノイマン条件より S^{00} 上では $\partial u / \partial n$ が零であることを考慮すると、相反定理は次のようになる。

$$\int_{S_3^+} (-2i\gamma_{pq}\Phi_{\pm}^{pq})dS - \int_{S^{00}} u^A \frac{\partial u_{\pm}^{Bpq}}{\partial n} dS = 0 \quad (12)$$

よって、 $\Phi_{\pm}^{pq}$ は次のようになる。

$$\Phi_{\pm}^{pq} = -\frac{1}{2ibc\gamma_{pq}} \int_{S^{00}} u^A \frac{\partial u_{\pm}^{Bpq}}{\partial n} dS \quad (13)$$

(p, q) モードの反射率 R_{pq} と透過率 T_{pq} はそれぞれの波動モードの振幅で表され、次のように書ける。

$$\begin{aligned} T_{00} &= 1 + \Phi_{+}^{00}, R_{00} = \Phi_{-}^{00} \\ T_{pq} &= \Phi_{+}^{pq}, R_{pq} = \Phi_{-}^{pq}, (p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (14)$$

反射率と透過率を表す式 (13) において、係数は解析条件によって決まり、 $\partial u_{\pm}^{Bpq} / \partial n$ の S^{00} 上の値は式 (11) を法線方向微分することによって得られる。すなわち、球形散乱体上の全波動場 u^A を求めれば、反射・透過率を基本ユニットセル内に存在する散乱体表面上の積分として決めることができる。

5. エネルギーバランス

ユニットセル内におけるエネルギーバランスを考える。単位面積、単位時間あたりのエネルギー p は次のように書ける。

$$\begin{aligned} p &= \text{Re}[te^{-i\omega t}] \text{Re}[ve^{-i\omega t}] \\ &= \frac{1}{4}(tv^* + t^*v) + \frac{1}{4}(tve^{-2i\omega t} + t^*v^*e^{2i\omega t}) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $*$ は共役複素数を表す。式 (15) を周期 $T = 2\pi/\omega$ で時間平均をとる。ユニットセル内の総エネルギーは零になるので、次のエネルギー保存式を得る。

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{2}\omega \text{Im} \int_S \frac{\partial u}{\partial n} u^* dS \equiv 0 \quad (16)$$

ここで $S = S_1^+ + S_2^+ + S_3^+$ である。式 (16) は入射波、反射波、透過波のエネルギーの和である。式 (16) に式 (2),(7),(8) を代入し、反射率・透過率の表現式 (14) を考慮すると、最終的に次のような反射率と透過率の関係式が導かれる。

$$\sum_p \sum_q \frac{\gamma_{pq}}{\gamma_{00}} (|T_{pq}|^2 + |R_{pq}|^2) = 1 \quad (17)$$

上式の (p, q) は、式 (6) のカットオフ波数から、そのモードの波が伝播モードになる組み合わせを選ぶ。上記関係式を後に数値解析により求める反射率・透過率の精度について検討する際に利用する。

6. 数値解析例

6.1 解析条件

境界要素法を用いて数値解析を行う。ここでは、形状は平面四角形要素で近似し、要素上の未知量は一定近似を採用している。球の半径は a であり、球面上の θ 方向分割数は 15、 φ 方向分割数は 12 である。アレー状散乱体は x_1, x_2 軸に沿う球の中心間距離が共に同じで、その間隔 b を球の半径 a で割って無次元化した b/a の値が 3.0 と 4.0 の場合を考える。また、入射波は x_3 軸方向 ($\theta = 0^\circ$) に伝播する平面波を考える。

6.2 反射率と透過率

4 節の結果を基に反射率 R と透過率 T を求めた。図 2 に $b/a = 3.0$ の場合、図 3 に $b/a = 4.0$ の場合の結果を示す。図の横軸が無次元化波数 ak であり、反射率と透過率は波数に依存している。波数が大きくなると高次のモードの波が出現するようになる。

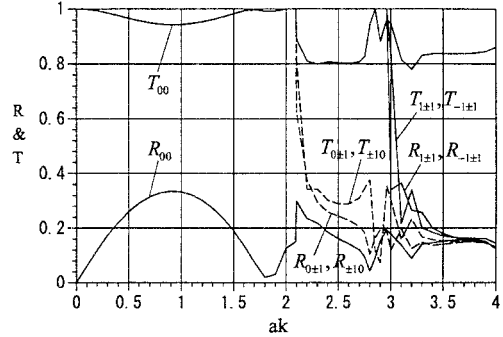


図 2 反射率と透過率 ($b/a = 3.0$)

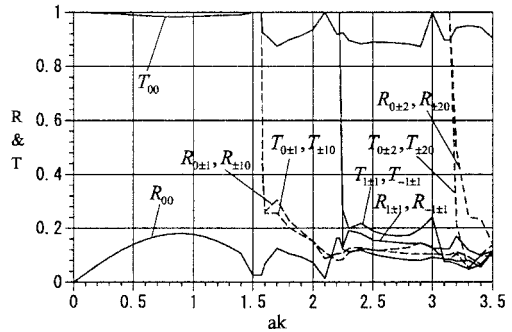


図 3 反射率と透過率 ($b/a = 4.0$)

6.3 反射率と透過率の精度

5 節で示した反射率と透過率の関係式 (17) を用いて、前節の結果の精度を確認する。表 1 に波数を変えたときの式 (17) との誤差を示す。全ての場合において誤差は非常に小さい値となっており、仮想波動場を導入することにより反射率と透過率を決定する本研究の数値解析手法の精度が確認できる。

表 1 反射率と透過率の精度

ak	誤差 (%)		ak	誤差 (%)	
	b/a=3.0	b/a=4.0		b/a=3.0	b/a=4.0
0.6	0.006	0.006	1.8	1.775	0.036
1.1	0.022	0.117	2.7	2.005	0.455
1.5	0.179	0.464	3.8	0.128	1.402

参考文献

- 1) Ewald, P.P.: Die Berechnung optischer und elektrostatischer getterpotentiale. *Annalen der Physik*. **64**(1921), pp.253-287.
- 2) 山田将紀, 北原道弘: 周期構造を有する散乱体による散乱問題の一解析, 土木学会東北支部, (1999), pp.82-83