

## I - 25

## ミンドリン板有限帯板法による立体構造物の応力解析

岩手大学工学部 正員 ○出戸秀明 岩崎正二 宮本裕  
岩手大学工学部 堀合聡 三宅淳一郎

## 1. まえがき

長方形板の曲げ問題の解法の一つとして有限帯板法による解法がある。この解法は、Cheung<sup>1)</sup>によって開発され、折れ板構造、箱型はり、シェルなどの膜力と曲げの二つの作用を同時に受ける薄肉立体構造物の解析<sup>2)</sup>に用いられている。本論文では、薄板構造から中厚板構造までの解析が可能な有限帯板公式をミンドリン板理論に基づき誘導する。長方形板の曲げ問題において本手法と厳密解法を比較検討するとともに、本手法を箱型はりやシェル構造解析に応用し、板厚等の解析結果に与える影響について考察する。

## 2. 解析理論

板厚方向のせん断力による変形等を考慮したミンドリン平板理論に基づいて帯板公式を誘導する。図-1に示す帯板要素において、たわみを $w$ とし、 $x, y$ 方向の曲げのみによって生ずる回転角をそれぞれ

$\psi_x, \psi_y$ とする。また変位関数を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} w &= \omega^{(1)} w_r + \omega^{(2)} \psi_{yr} + \omega^{(3)} w_{r+1} + \omega^{(4)} \psi_{yr+1} \\ \theta_y &= \omega^{(1)} \psi_{yr} + \omega^{(3)} \psi_{yr+1}, \theta_x = -\omega^{(1)} \psi_{xr} - \omega^{(3)} \psi_{xr+1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{ここで、} [\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}, \omega^{(4)}] = \left[ 1 - \eta, -\frac{\eta(\eta-1)}{2} b, \eta, \frac{\eta(\eta-1)}{2} b \right]$$

$\eta = y/b$ 、サフィクス $r, r+1$ は、それぞれ $y=0, y=b$ 点での境界物理量を表わす。 $x, y, z$ 方向の力とモーメントのつりあい式に上述の試験関数を用いてガラーキン法を適用すると

$$\int_0^b \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \omega^{(i)} dy = 0 \quad (i=1,3) \quad (2) \quad -\int_0^b \left( Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) \omega^{(i)} dy = 0 \quad (i=1,3) \quad (4)$$

$$\int_0^b \left( Q_y - \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right) \omega^{(i)} dy + \int_0^b \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \omega^{(i+1)} dy = 0 \quad (i=1,2) \quad (3)$$

ここで、 $Q_x, Q_y$ はせん断力、 $M_x, M_y$ は $y$ 軸、 $x$ 軸まわりの曲げモーメント、 $M_{yx}$ はねじりモーメントを表わす。面外変形に関する断面力と変位の関係式は<sup>3)</sup>、

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) & Q_x &= \kappa h G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) & Q_y &= \kappa h G \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \\ M_{yx} &= -\frac{1-\nu}{2} D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$   $G = Eh/2(1+\nu)$   
 $E, G, \nu$ は、それぞれ弾性係数、せん断弾性係数、ポアソン比を、 $\kappa$ はせん断補正係数を表わす。

式(5)を式(2),(3),(4)に代入し、部分積分を施すと $x$ に関して2階の線形連立微分方程式が得られる。式(4)か

ら得られる方程式には $\cos \frac{m\pi}{\ell} x$ 、他式から得られる式に $\sin \frac{m\pi}{\ell} x$ を乗じ $0 \leq x \leq \ell$ で有限フーリエ変換を施し、

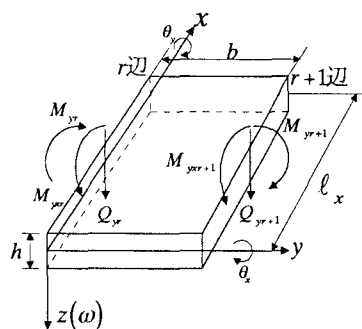


図-1 ミンドリン板帯板要素の力と変位

両端単純支持の境界条件に留意して整理すると次のような有限帯板公式が求まる。

$$[K_m]\{\bar{S}_m[\delta]\} = \{\bar{S}_m[f]\} \quad (6)$$

ここで、 $\{\bar{S}_m[\delta]\}$ 、 $\{\bar{S}_m[f]\}$  はそれぞれ節線変位ベクトル、節線断面力ベクトルの像関数であり次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \{\bar{S}_m[\delta]\} &= [S_m[\omega_r], S_m[\psi_{yr}], C_m[\psi_{xr}], S_m[\omega_{r+1}], S_m[\psi_{yr+1}], C_m[\psi_{xr+1}]] \\ \{\bar{S}_m[f]\} &= [S_m[Q_{yr}], S_m[M_{yr}], C_m[M_{yr}], S_m[Q_{yr+1}], S_m[M_{yr+1}], C_m[M_{yr+1}]] \end{aligned}$$

$$\text{又、 } S_m[\omega_r] = \int_0^\ell \omega_r \sin \frac{m\pi}{\ell} x dx, \quad C_m[\psi_{xr}] = \int_0^\ell \psi_{xr} \cos \frac{m\pi}{\ell} x dx$$

で他もこれに準ずる ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )

$[K_m]$  は剛性マトリックスで式(7)のように表わされる。

$$[K_m] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & 0 & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & \text{Sym} & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\frac{\kappa h G b}{3} \left( \frac{m\pi}{\ell} \right)^2, \quad K_{12} = \frac{\kappa h G}{2}, \quad K_{13} = \frac{\kappa h G b}{3} \left( \frac{m\pi}{\ell} \right), \quad K_{14} = \frac{\kappa h G b}{6} \left( \frac{m\pi}{\ell} \right)^2 - \frac{\kappa h G}{b}, \quad K_{16} = \frac{\kappa h G b}{6} \left( \frac{m\pi}{\ell} \right) \\ K_{22} &= -\frac{1-\nu}{2} D \frac{b}{3} \left( \frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + \frac{\kappa h G b}{3}, \quad K_{23} = \frac{1-3\nu}{4} D \left( \frac{m\pi}{\ell} \right), \quad K_{25} = -\frac{1-\nu}{2} D \frac{b}{6} \left( \frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + \frac{\kappa h G b}{6}, \quad K_{26} = \frac{1+\nu}{4} D \left( \frac{m\pi}{\ell} \right) \\ K_{33} &= D \frac{b}{3} \left( \frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + \frac{\kappa h G b}{3} + \frac{1-\nu}{2b} D, \quad K_{36} = D \frac{b}{6} \left( \frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + \frac{\kappa h G b}{6} - \frac{1-\nu}{2b} D \\ K_{44} &= K_{11}, \quad K_{45} = -K_{12}, \quad K_{46} = K_{13}, \quad K_{55} = K_{22}, \quad K_{56} = -K_{23}, \quad K_{66} = K_{33} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

### 3. 数値解析結果とまとめ

表-1 は等分布荷重  $q$  を受ける四辺単純支持等方

性矩形平板において、板の厚さ  $h$  を大きくしたときの板の中央点のたわみの結果を厳密解と比較したものである。表中の値  $\delta$  は薄板理論による解との差を表わしたものである。表より本手法の結果は、板厚が薄い場合も含めていずれも厳密解とよい一致を示している。そのため本帯板公式は薄板から中厚板構造まで幅広く適用できるものと思われる。なお、円筒形シェルや箱型はりの解析結果については当日発表予定である。

表-1 等分布荷重  $q$  を受ける四辺単純支持正方形板の中央点の

たわみ  $[w = 0.00406(1+\delta)q\ell_x^4/D]$  の比較

| $h/\ell_x$ | $\delta$ |          |         |                |
|------------|----------|----------|---------|----------------|
|            | 薄板       | 厳密解      |         | 本手法<br>(F S M) |
|            |          | Reissner | Mindlin |                |
| 0.10       | 0        | 0.044    | 0.052   | 0.050          |
| 0.20       | 0        | 0.176    | 0.207   | 0.206          |
| 0.30       | 0        | 0.396    | 0.466   | 0.467          |
| 0.50       | 0        | 1.101    | 1.295   | 1.299          |

### 参考文献

- 1) Y.K.CHEUNG, 'The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends', Proc. Inst. Civ. Eng., 40, 1-7, 1968
- 2) Y.K.CHEUNG, Finite strip method in structural analysis, Pergamon Press, 1976
- 3) C.L.テイム / I.H.シャム; 材料力学と変分法, ブレイン図書出版(株), pp350~351