I －22　イメージベーストモデリングに基づくトポロジー最適化の研究

東北大学　学生員　○石橋　慶輝
東北大学　学生員　松井　和己
東北大学　正会員　寺田　賢二郎

1. まえがき

連続体構造物のトポロジーを決定する最適化手法は，Bendsøe and Kikuchi[1]が設計領域を包含する拡張領域の材料配置問題として定式化して以来，近年目覚ましい発展を遂げている．一般的に，トポロジー最適設計手法で多く用いられている矩形の有限要素モデルは，イメージベーストモデリングに基づくものである．このイメージベースト有限要素解析の解析精度に関していくつかの問題点が指摘されているにもかかわらず，トポロジー最適設計手法のモデル化および解析について力学的な視点から検討されておらず，非線形問題への拡張を考えた際その精度に疑問が残る．本研究では，力学的視点からの種々のケーススタディを行い，均質化法によるトポロジー最適設計を非線形問題に適用する際の指針を与える．

2. 均質化法によるトポロジー最適設計[2]

均質化法によるトポロジー最適設計法では，設計領域全体に無限小のサイズの孔をもつミクロ構造を分布させ，その孔の大きさを設計変数とすることによって問題を材料配置問題に置き換える．ミクロ構造の孔の大きさを設計変数にとることにより，均質化法によって材料特性を設計変数で表すことになる．

ある一定の体積制限 $\overline{\Omega}_s$ のもとで剛性の最大化を考えたとき，最適化問題は次式の通りとなる．

$$\begin{aligned}
&\underset{a,b,\theta}{\text{Maximize}} \quad \underset{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}{\text{Minimize}} \quad F(\boldsymbol{v}) \\
&\text{subject to} \quad \Omega_s = \int_\Omega \{1-(1-a)(1-b)\}d\Omega \le \overline{\Omega}_s \\
&\qquad 0 \le a \le 1 \\
&\qquad 0 \le b \le 1 \\
&\qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \qquad \cdots\cdots (1)$$

ここで，$F(\boldsymbol{v})$ は線形弾性体からなる設計対象構造物の全ポテンシャルエネルギー，Ω_s はマクロ構造全体の体積，$\overline{\Omega}_s$ は設計対象の体積の制約値，$a, b\ (0 \le a, b \le 1)$ はマクロ材料特性を与えるためのミクロ構造ユニットセルの穴の大きさである．また，ユニットセルの角度 θ も考慮する．この最適化問題では，Lagrangian を以下のように定義し，

$$\mathcal{L} = F(\boldsymbol{u}) - \Lambda\left(\int_\Omega \{1-(1-a)(1-b)\}d\Omega - \Omega_s\right) - \int_\Omega \{\lambda_{a0}(-a) + \lambda_{a1}(a-1)\}d\Omega - \int_\Omega \{\lambda_{b0}(-b) + \lambda_{b1}(b-1)\}d\Omega \quad \cdot (2)$$

この停留条件

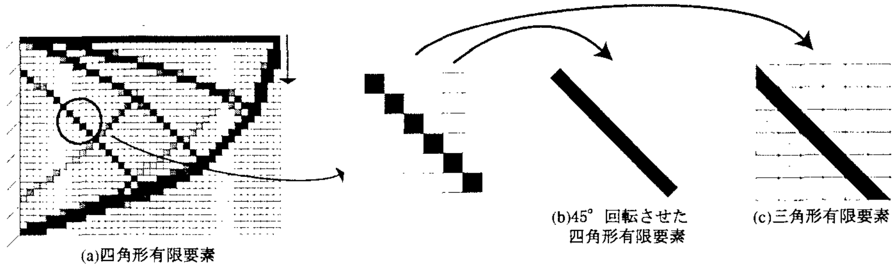
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} &= \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})^T \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial a}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - u^T\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial a} + \Lambda(b-1) + \lambda_{a0} - \lambda_{a1} = 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b} &= \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})^T \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial b}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - u^T\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial b} + \Lambda(a-1) + \lambda_{b0} - \lambda_{b1} = 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \theta} &= \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})^T \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \theta}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = 0
\end{aligned}\right. \qquad \cdots\cdots (3)$$

を考える．ここで，$\Lambda, \lambda_{a0}, \lambda_{a1}, \lambda_{b0}, \lambda_{b1}\ (\Lambda, \lambda_{a0}, \lambda_{a1}, \lambda_{b0}, \lambda_{b1} \le 0)$ は Lagrange 未定乗数である．この最適条件から設計変数の更新方法が得られ，最適化の繰り返し計算の中で設計変数を更新することにより材料の最適配置が得られ，その密度分布によって最適構造が同定される．

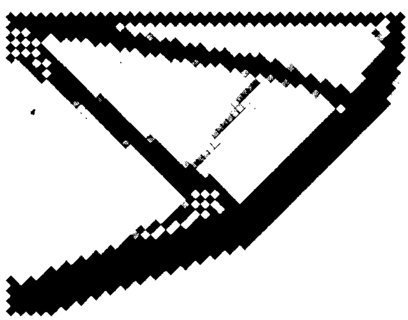
3. イメージに基づくモデリングによる影響

トポロジー最適設計ではあらかじめ設計領域を定型の有限要素で分割し，各要素の ON/OFF によって全体の構造物が表現されている．つまり，解析プロセスの考え方は，新たな有限要素モデル作成手法として期待されているイメージベーストモデリングに他ならない．しかしながら，このモデル化手法では画素を有限要素として扱うため滑らかな境界を厳密に表現することができず，境界近傍で物理的に許容されない特異な応力振動が生じることが指摘されている[3]．これは応力集中とは異なり物理的に意味のないものであり，従来のトポロジー最適設計法の解は，人為的な誤差を含むものである．そのような特異な応力振動を許容した構造解析によって得られた結果の信頼性にも疑問が残るばかりか，正確に評価されていない応力を回避しない限り非線形問題への拡張は困難である．以下では，これらの事項についてケーススタディを行い，問題点を整理する．

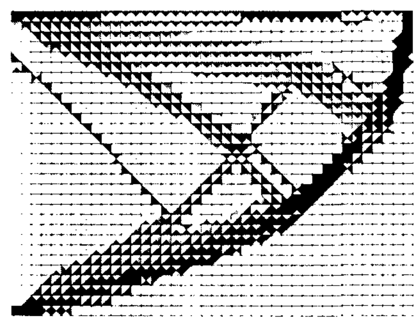
まず，トポロジー最適設計法の典型的な設計例を図–1に示す．図中の円で囲まれた部分をみると，中実要素が節点だけでつながっており，実際にはどのような部材であるかを判断するのは困難である．そこでこの円で囲まれた部分は45° 方



図–1 一般的な解析結果と境界の近似



図–2 回転させた四角形有限要素モデルの解析結果



図–3 三角形要素モデルの解析結果

向に伸びているため，境界を滑らかに近似するために 45° 回転させた有限要素 (**図–1**の (b)) を用いて同様の設計問題を解き，その結果を**図–2**に示す．この結果から，境界が滑らかに表現された部分もあるが，逆に滑らかな境界を表現できなくなってしまった部分もある．また，チェッカーボード状の密度分布も発生してしまっている．**図–1**と**図–2**を比較すると，解析モデルを変更することにより得られた解析結果の形態自体が変化していることがわかる．これは，部材の幾何学的近似に方向性があること，応力を正確に評価できていないことなどが原因として考えられる．

従来広く用いられている 1 ピクセルを 1 つの四角形有限要素と見なす方法では，構造の境界に凹凸が生じ応力近似の精度が悪くなっている．そこで多少の滑らかさを与えるために四角形を 4 つに分割した三角形要素 (**図–1**の (c)) を用いて同様の解析モデルを作成し，構造物の形状近似に自由度を与えて最適化を行った．その結果を**図–3**に示すが，大半がチェッカーボード状の密度分布になってしまい，構造の境界の判断が非常に難しい．これは，三角形要素の変形性能に原因があると考えられ，適切な解析モデルの設定については更に要素レベルでの改善が必要であろう．

4. まとめ

本研究ではトポロジー最適設計を非線形問題へ拡張するために，イメージベースの解析モデルについてケーススタディを行い，モデル設定の影響を調べた．回転させた四角形有限要素や，三角形要素を用いて解析モデルを作成することにより滑らかな境界が得られ，正確に応力を評価できると思われたが，得られた構造の形態は大きく変化し，さらに三角形要素に至っては構造の大半はチェッカーボード状の密度分布であった．

変形性能の高い高次の三角形要素を用いることにより滑らかな境界近似が可能となり，応力の正確な評価が可能になると考えられる．その正確な応力の評価により，結果としてチェッカーボードや残留するグレースケールの問題なども回避できるものと期待される．

参考文献

1) Bendsøe,M.P. and Kikuchi,N.,Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71,pp.197-224,1988
2) Suzuki,K. and Kikuchi,N., A homogenization method for shape and topology optimization, Comput.Methods Appl.Mech.Engrg,93,291-318,1991
3) K.Terada , T.Miura and N.Kikuchi, Digital image-based modeling applied to the homogenization analysis of composite materials,Computational Mechanics,20 (1997) 331-346