

III-47

粒状体のマルチスケール解析モデルの開発とその応用

東北大学 学生員 ○神田 隆真

東北大学 岸野 佑次・京谷 孝史・金子賢治・寺田賢二郎

1 はじめに

砂や土などの非均質性地盤材料は粒状体としてモデル化され、その離散的な解析手法として個別要素法（DEM）や粒状要素法（GEM）が広く用いられている。しかしながらそれらの解析手法は、構成則の検証などの粒状体のマイクロメカニクスの解明という点については適しているが、計算容量による粒子数の制限などの理由から、実地盤のマクロ挙動を解明するという点については適していない。

これに対し非線形均質化理論に基づくマルチスケール解析法は、対象とする構造物の局所的な領域に想定した代表体積の解析を通してマクロ的な材料挙動を得ることが出来る統一的な解法の一つでありミクロ・マクロ連成挙動を解明するためのモデル化もその一つである¹⁾。

本研究ではこの手法を、微視領域において周期的な代表体積が定義できるような粒状体に適用することにより、その巨視的な変形挙動を得ることが出来るようなマルチスケール解析モデルを開発する。粒状体を連続体とみなした変分不等式を出発点として支配方程式を導出する。

2 マルチスケール解析法

図1-(a)に示すような微視的構造粒状体が周期的に存在する物体を考える。いま周期構造を構成するひとつの単位領域をユニットセルとよび、これを繰り返し配置することにより全体を覆うことが出来るものとする。またその大きさを ε で表わす。以下の定式化では領域 Ω_c^ε において材料中の微視的周期構造に依存している場の変数、変位、応力、ひずみに上付き文字 ε を用いて $u^\varepsilon(x)$, $\sigma^\varepsilon(x)$, $\varepsilon^\varepsilon(x)$ のように表記するものとする。いま領域 Ω_c^ε においてこの物体の力の釣り合い問題は以下のように与えられる。

$$\operatorname{div} \sigma^\varepsilon + \rho^\varepsilon b = 0 \quad \text{in } \Omega_c^\varepsilon \quad (1)$$

また境界 $\partial\Omega$ ではそれぞれ変位と表面力が

$$u^\varepsilon = g \quad \text{on } \partial\Omega_u^\varepsilon \quad (2)$$

$$t = \sigma^\varepsilon \cdot n \quad \text{on } \partial\Omega_t^\varepsilon \quad (3)$$

そして変位ひずみ関係と、構成式が

$$\varepsilon^\varepsilon = \operatorname{sym}(\nabla u^\varepsilon) \quad (4)$$

$$\sigma^\varepsilon = a^\varepsilon : \varepsilon^\varepsilon \quad (5)$$

のように与えられているとする。

次にユニットセル内の粒子間接触の様子を図1-(b)に示す。ユニットセル内には粒子間における接触点が N^c 個存在している。ここでは便宜的にその集合を $C^\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{N^c} C_i$ と定義する。 n^c は C_i における法線ベクトルである。この接触領域 C_i においては変位 u^ε および接触力ベクトル T が

$$u^\varepsilon = u_n^\varepsilon n^c + u_t^\varepsilon \quad (u_n^\varepsilon = u^\varepsilon \cdot n^c, u_t^\varepsilon = u^\varepsilon - u_n^\varepsilon n^c)$$

$$T = \sigma^\varepsilon \cdot n^c = T_n n^c + T_t \quad (T_n = t \cdot n^c, T_t = t - T_n n^c)$$

のように分解され、接触条件と摩擦則が²⁾

$$[u_n^\varepsilon] \leq 0, -T_n(u^\varepsilon) \geq 0, -T_n(u^\varepsilon)[u_n^\varepsilon] = 0 \quad \text{on } C_i \quad (6)$$

$$\tan \phi [T_t(u^\varepsilon)] + c \geq |T_t(u^\varepsilon)| \quad \text{on } C_i \quad (7)$$

として与えられる。

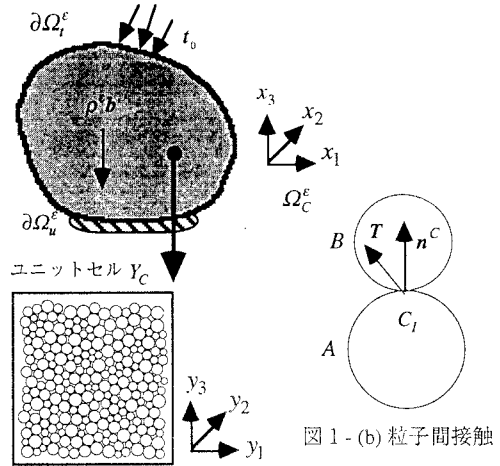


図1-(a) マルチスケール概念図

ここで $[u_n^\varepsilon]$ は領域 A 領域 B での u_n^ε の不連続量 $u_{nA}^\varepsilon - u_{nB}^\varepsilon$ を表している。また ϕ は内部摩擦角、 c は粘着力である。

上述の物体の釣り合い問題は以下のような変分不等式により与えられる。

$$\int_{\Omega_c^\varepsilon} \tau^\varepsilon : (\operatorname{sym}(\nabla u^\varepsilon) - \varepsilon^\varepsilon) dv = 0 \quad \forall \tau^\varepsilon \in S^\varepsilon \quad (8)$$

$$\int_{\Omega_c^\varepsilon} \nabla(v^\varepsilon - u^\varepsilon) : \sigma^\varepsilon dv + j(u^\varepsilon, v^\varepsilon) - j(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geq \int_{\Omega_c^\varepsilon} \rho^\varepsilon b \cdot (v^\varepsilon - u^\varepsilon) dv + \int_{\partial\Omega} t \cdot (v^\varepsilon - u^\varepsilon) ds \quad \forall v^\varepsilon \in K^\varepsilon \quad (9)$$

$$\int_{\Omega_c^\varepsilon} \gamma^\varepsilon : (a^\varepsilon : \varepsilon^\varepsilon - \sigma^\varepsilon) dv = 0 \quad \forall \gamma^\varepsilon \in S^\varepsilon \quad (10)$$

$$j(u^\varepsilon, \eta^\varepsilon) = \int_{C^\varepsilon} \mu [T_n(u^\varepsilon)] \|\eta_t^\varepsilon\| ds \quad (11)$$

$$K^\varepsilon(\Omega_c^\varepsilon) = \{u^\varepsilon | u^\varepsilon \in V(\Omega_c^\varepsilon); [u_n^\varepsilon] \leq 0 \quad \text{on } C_i\}$$

$$S^\varepsilon(\Omega_c^\varepsilon) = \{\sigma^\varepsilon(x) | \sigma_{ij}^\varepsilon \in L^2(\Omega_c^\varepsilon)\}$$

$$V^\varepsilon(\Omega_c^\varepsilon) = \{v^\varepsilon(x) | v_{ij}^\varepsilon \in H^1(\Omega_c^\varepsilon), v^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_c^\varepsilon\}$$

ここで、 L^2 は 2 乗 Lebesgue 可積分空間、 H^1 は一階の微分までが L^2 に属する Sobolev 空間であり、

a^ε は弾性係数テンソル $\rho^\varepsilon b$ は物体力である。また v^ε , τ^ε , γ^ε はそれぞれ変位、応力、ひずみに対応する変分である。

式(8)から(11)で示される変分不等式に対しマクロスケールの変数 $x \in \Omega_c$ 、ミクロスケールの変数 $y = x/\varepsilon \in Y_c$ を導入し、Two-scale 収束論²⁾を用いた結果としてマクロ場 $(u^0(x), \Sigma(x), E(x))$ に対する支配方程式

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \eta^0 : \Sigma dx = \int_{\Omega} \rho^H b \cdot \eta^0 dx + \int_{\partial\Omega} t \cdot \eta^0 ds \quad \forall \eta^0 \in V(\Omega) \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} T : (\operatorname{sym}(\nabla_x u^0) - E) dx = 0 \quad \forall T \in S^0(\Omega) \quad (13)$$

と、ミクロ場 $(u^0(x,y), \sigma^0(x,y), \varepsilon^0(x,y))$ に対する支配方程式が

$$\int_{Y_c} \nabla_y \eta^1 : \sigma^0 dy + j_{Y_c}(u^1, \eta^1) - j_{Y_c}(u^1, u^1) \geq 0 \quad (14)$$

$$\forall \eta^1 \in K^1(Y) \quad \int_{Y_c} \gamma^0 : (a : \varepsilon^0 - \sigma^0) dy = 0 \quad \forall \gamma^0 \in L^2(\Omega; L^2(Y)) \quad (15)$$

$$\int_{Y_c} \tau^0 : (sym(\nabla_y u^0 + \nabla_y u^1) - \varepsilon^0) dy = 0 \quad (16)$$

$$\forall \tau^0 \in L^2(\Omega; L^2(Y))$$

のように求まり、さらに構成関係として

$$\Sigma(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma^0(x,y) dy \quad \text{in } \Omega \quad (17)$$

が与えられる。マルチスケール解析では、これらのミクロ・マクロの式を同時に解くことにより解析を行う。まずマクロ解析において式(12)を離散化し有限要素法よりマクロ場のひずみ E を求め、それを各ガウス点ごとにミクロ場の支配方程式に与えることにより式(17)より求まるマクロ応力を算定する。本研究ではミクロ解析においては周期境界条件を考慮した粒状要素法⁴⁾を用いて解析を行った。

3 マルチスケール解析例

図2に本解析に用いたモデルを示す。一つのガウス点に対し一つのユニットセルが対応している。このモデルに対し拘束圧 t_0 を変え、载荷シミュレーション解析を行った。得られたマクロな応力-ひずみ曲線を図3に示す。粒状体の拘束圧の変化によるマクロ挙動の違いがよく表されていることがわかる。次に拘束圧 15 kgf/cm^2 のケースについて、図4に要素no.1とno.16の左下のガウス点における結果の違いを示す。図5はこのときの接触力の様子である。それぞれについて間隙比、配位数を計算した結果を表1に示す。ガウス点毎の微視構造変化の相違を観察することができる。

4 おわりに

本研究では、均質化理論を用いることにより粒状体材料のミクロ・マクロスケールの力学挙動を結びつけたマルチスケール解析法を開発した。開発したモデルは粒状体内部の様子を観察することができる点で優れている。本手法は現実に近いミクロモデルを導入すればそれだけ実際の力学挙動を反映可能であるということがいえる。

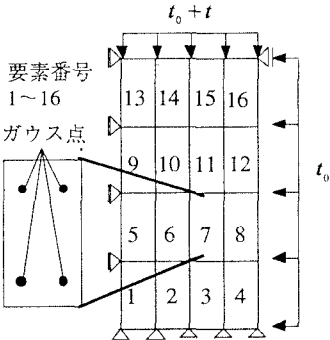


図2 マルチスケール解析モデル

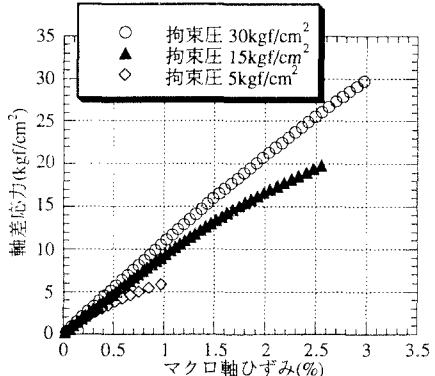


図3 マクロ応力-ひずみ曲線

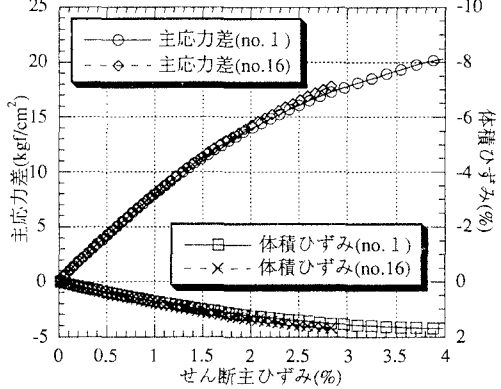


図4 応力-ひずみ曲線 (ミクロ)

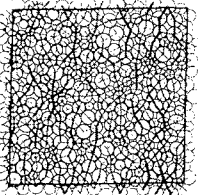


図5 ユニットセル内の接触力分布 (要素 no.16 左下ガウス点)

	間隙比	配位数
要素no.1	0.1146	2.25
要素no.16	0.1141	2.3

参考文献

- 1) 岸野佑次, 粒状体の準静的挙動の解析, 土木学会論文誌, No.406/III-11, pp.97-116, 1989.
- 2) 寺田賢二郎, 菊池昇, 非均質弾塑性体のマルチスケール解析のための一般化アルゴリズム, 土木学会論文誌, 633/I-49, 217-229, 1999.
- 3) 寺田賢二郎, 京谷孝史, 無数の亀裂を有する物体のマルチスケール応力変形解析法, 土木学会論文誌, 619/I-47, 23-33, 1999.
- 4) 金治賢治, 岸野佑次, 林直宏, 京谷孝史: 粒状要素解析による地盤材料損傷モデルの定式化, 応用JSCE, Vol.2, pp.427-438, 1999.