

II-79

細粒土砂の水路形成

東北大学大学院工学研究科 学生員 ○藤井 健司
東北大学大学院工学研究科 正員 泉 典洋
東北大学大学院工学研究科 正員 田中 仁

1. はじめに

大地の表面は雨水によって発生する表面流によって侵食を受けている。一般に大規模な森林伐採が行われると、表層土が斜面下部でのガリ侵食を受け、流れの集中により流出土砂が著しく増加することが知られている。また雲仙普賢岳では大雨の際にガリ侵食による多量の流出土砂が問題になっていた。こういった侵食防止の観点からはガリ侵食の発生をくい止める必要がある。本研究は、森林土壌や火山灰といった細粒土砂におけるガリ発生のメカニズムを明らかにすることを目的とする。

2. モデル

図-1に示すような、下流端に段差を有する一様勾配Sの斜面を考える。図のように水平面内に $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ をとり、それぞれ流下方向及び横断方向の座標とする。

いま斜面の勾配が十分小さく段差より上流の斜面上のいたところで流れは常流となっていると仮定する。段差付近では活発な侵食が生じているため、段差は上流側へ前進していく。段差や流れが横断方向に完全に一樣であれば段差は横断方向に一直線のまま上流側に移動することになるが、実際は不規則な擾乱を有しており、その擾乱が発達してガリを形成することになる。次節以降では侵食によって上流側に前進する段差に対してサイン型の微小擾乱を与え、その擾乱の発達率を調べる。

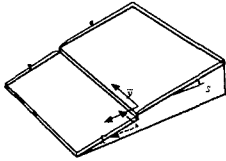


図-1 斜面の概念図と座標系

3. 定式化

(1) 支配方程式

斜面上を流れる表面流の運動を記述する浅水方程式及び連続式は次のようになる。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} + gS - \frac{\tilde{\tau}_x}{\rho h} \quad (1)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} - g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{y}} - g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\tilde{\tau}_y}{\rho h} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{u} \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v} \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (3)$$

ここで図-1に示すように $\tilde{x}$ 及び $\tilde{y}$ は水平面内にとられた流下方向及び横断方向の座標であり、 $\tilde{u}$ 及び $\tilde{v}$ はそれぞれ $\tilde{x}$ 及び $\tilde{y}$ 方向の流速成分である。 $\tilde{\eta}$ および $\tilde{h}$ はそれぞれ河床高さおよび水深である。また、 $\tilde{\tau}_x$ 及び $\tilde{\tau}_y$ はそれぞれ底面剪断力 $\tilde{\tau}$ の $\tilde{x}$ 及び $\tilde{y}$ 成分である。

底面剪断力は次式で表す。

$$(\tilde{\tau}_x, \tilde{\tau}_y) = \tilde{\tau} \frac{(\tilde{u}, \tilde{v})}{(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^{1/2}}, \quad \tilde{\tau} = \rho C_f (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \quad (4.5)$$

ここで C_f は抵抗係数であり、定数とみなす。

また、河床高さの時間変化、水深方向に積分した浮遊砂の移流拡散方程式は次式で表される。

$$(1-\lambda) \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} = D - E, \quad \frac{\partial \tilde{u} \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v} \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{y}} = E - D \quad (6,7)$$

ここで D 及び E は、堆積量及び巻き上げ量であり、 λ は空隙である。 $\tilde{\zeta}$ は水深方向に積分した浮遊砂濃度である。堆積量 D 、巻き上げ量 E はは次のように表される。

$$D = \frac{w_s^2}{\varepsilon_z} \tilde{\zeta}, \quad E = K \left(\frac{u_*}{w_s} \right)^3 w_s, \quad \varepsilon_z = \alpha u_* \tilde{h} \quad (8,9,10)$$

ここで w_s は粒子の沈降速度、 u_* は摩擦速度、 K は定数である。 ε_z は鉛直方向の浮遊拡散係数であり、 α は定数であり一般に0.77が用いられる。

(2) 無次元化

次のような無次元化を導入する。

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = U_c (u, v), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{H_c}{C_f} (x, y), \quad \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_c \zeta \quad (11a, b, c, d, e)$$

$$(\tilde{h}, \tilde{\eta}) = H_c (h, \eta), \quad D = D_c \zeta, \quad E = E_c u^3 \quad (11f, g, h, i)$$

$$\tilde{t} = \frac{(1-\lambda) H_c}{D_c} t, \quad \tilde{\tau} = \frac{D_c}{(\alpha - \lambda) C_f} \tau \quad (11j, k)$$

ここで、 U_c 、 H_c および $\tilde{\zeta}_c$ はフルード限界点における流速、水深および水深方向に積分した浮遊砂濃度である。フルード限界点をフルード数が1になる点であるとする。

$$U_c / (g H_c)^{1/2} = 1 \quad (12)$$

D_c 及び E_c は、それぞれフルード限界点における堆積量及び巻き上げ量であり、次のように表される。

$$D_c = \frac{w_s^2}{\varepsilon_z} \tilde{\zeta}_c, \quad E_c = K \left(\frac{u_*}{w_s} \right)^3 w_s \quad (13, 14)$$

ここで u_* は、限界点での摩擦速度である。

定常解を導くため次のような座標変換を導入する。

$$\tilde{x}^* = \tilde{x} + \tilde{c} \tilde{t}, \quad \tilde{t}^* = \tilde{t} \quad (15a, b)$$

ここで c は、フロントの移動速度である。

このとき、支配方程式は次のように表される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} u}{h} \quad (16)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} v}{h} \quad (17)$$

$$\frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

$$\beta \left(\frac{\partial u \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v \zeta}{\partial y} \right) = \gamma (u^2 + v^2)^{1/2} - \zeta \quad (19)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} = \zeta - \gamma(u^2 + v^2)^{3/2} \quad (20)$$

ここで、 $\beta = \frac{C_f U_c \tilde{\zeta}_0}{H_c D_c}$ 、 $\gamma = \frac{E_c}{D_c}$ 、 $\sigma = \frac{S}{C_f}$ であり、表記を

簡単にするために*を落としている。

β は粒子の浮遊しやすさを表すパラメーターであり、 β が大きいほど粒子は浮遊しやすいことを表す。 γ はフルード限界点における堆積量及び巻き上げ量の比である。 σ は正規化された斜面勾配であり、ここでは常流であると仮定しているので σ は1より小さくなければならない。

4. 線形安定解析

横断方向に一樣である流れの場を考え、式(16)-(20)においてy方向への変化を無視した一次元の基本解に対して斜面横断方向に次のような波状の擾乱を与える。

$$\eta = \eta_0 + a \cos ky \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (21)$$

ここで a は擾乱の振幅であり、擾乱の発達初期を想定して微小であるとみなす。以下ではこのような擾乱がその後発達するのか減衰するのかを調べるために線形安定解析を行う。このような擾乱が与えられた場合、各変数は次のように表される。

$$u = u_0 + ae^{i\omega t} u_1 \cos ky, \quad v = ae^{i\omega t} v_1 \sin ky \quad (22a, b)$$

$$h = h_0 + ae^{i\omega t} h_1 \cos ky, \quad \zeta = \zeta_0 + ae^{i\omega t} \zeta_1 \cos ky \quad (22c, d)$$

$$\eta = \eta_0 + ae^{i\omega t} \eta_1 \cos ky \quad (22e)$$

ここで ω は擾乱の発達初期における発達速度を表している。 ω が正ならば擾乱は発達し、負ならば減衰することを意味している。

式(22)を(16)-(20)に代入して整理すると次の微分方程式系が得られる。数値的解法の一方法である緩加法を用いて式(23)-(27)を解く。

$$\frac{du_1^*}{dx} = -\frac{(u_0^2 + u_0^{-1})u_0^* + (2-3c^{-1}\gamma)u_0^2}{u_0^3-1}u_1^* + \frac{k}{u_0^3-1}v_1^* + \frac{u_0^6 + u_0u_0^*}{u_0^3-1}h_1^* - \frac{c^{-1}u_0^2}{u_0^3-1}\zeta_1^* + \frac{c^{-1}u_0^2}{u_0^3-1}\omega\eta_1^* \quad (23)$$

$$\frac{dv_1^*}{dx} = -u_0v_1^* + \frac{k}{u_0}h_1^* + \frac{k}{u_0}\eta_1^* \quad (24)$$

$$\frac{dh_1^*}{dx} = \frac{2u_0^* + (2-3c^{-1}\gamma)u_0^2}{u_0^3-1}u_1^* - \frac{ku_0}{u_0^3-1}v_1^* - \frac{u_0^4 + u_0^2u_0^*}{u_0^3-1}h_1^* + \frac{c^{-1}}{u_0^3-1}\zeta_1^* - \frac{c^{-1}}{u_0^3-1}\omega\eta_1^* \quad (25)$$

$$\frac{d\zeta_1^*}{dx} = \frac{\zeta_0(u_0 + u_0^{-2})u_0^* + (2-3c^{-1}\gamma)u_0^3\zeta_0 - (u_0^{-1}\zeta_0' - 3\gamma\beta^{-1}u_0)(u_0^3-1)}{u_0^3-1}u_1^* - \frac{ku_0^2\zeta_0}{u_0^3-1}v_1^* - \frac{u_0^5\zeta_0 + u_0^{-1}\zeta_0}{u_0^3-1}h_1^* + \frac{c^{-1}u_0\zeta_0 - (u_0^{-1}u_0 + \beta^{-1}u_0^{-1})(u_0^3-1)}{u_0^3-1}\zeta_1^* - \frac{c^{-1}\omega u_0\zeta_0}{u_0^3-1}\eta_1^* \quad (26)$$

$$\frac{d\eta_1^*}{dx} = -\frac{3u_0^2}{c}u_1^* + c^{-1}\zeta_1^* - \frac{\omega}{c}\eta_1^* \quad (27)$$

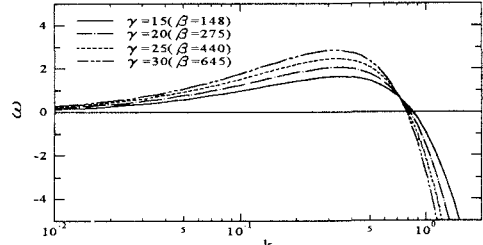


図-2 無次元波数 k および γ による増幅率 ω の変化($\sigma=0$)

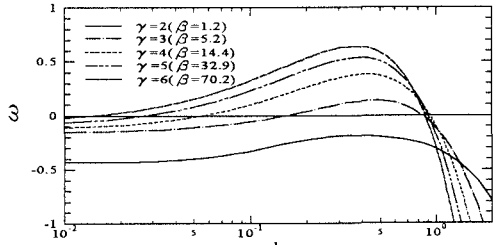


図-3 無次元波数 k および γ による増幅率 ω の変化($\sigma=0.1$)

5. 結果と考察

図-2,3は、それぞれのパラメーターの変化による ω の変化を示したものである。先にも述べたとおり ω が正ならばその擾乱は発達し、負なら減衰する。 ω が正でさらに ω が最大とする k が存在すればそれが卓越波数となり、卓越波数に対応した卓越波長が水路群の間隔として現れると考えられる。図-2,3において ω は、 $k=0 \sim 1$ 程度の時に正の値をとり、概ね $k=0.3 \sim 0.5$ の範囲で ω は正の最大値をとっていることが分かる。卓越波長は無次元卓越波数 k_c を用いて次のように表される。

$$\tilde{\lambda}_c = 2\pi(D_c/C_f)/k_c \quad (28)$$

ここで C_f の値は0.01のオーダーである。したがって $\tilde{\lambda}$ が限界水深 D_c の600倍程度以上の擾乱のみが発達し、それより小さくても発達できないことになる。また無次元卓越波数の平均値を0.4程度と考えると、実際に現れる水路群間隔に対応する $\tilde{\lambda}_c$ の値は D_c の1500倍程度となる。これは浮遊砂の堆積を考慮していない泉¹⁾の結果より1.5倍程大きな値となる。つまり浮遊砂の堆積を考慮すると、考慮しない場合に比べ若干水路間隔が大きくなるということを示している。

また、図-2,3を比較すると、勾配が小さくなるにつれて γ が大きくなり、水路化が起らない傾向がある。これは勾配が小さくなるとその分浮遊しやすい条件でしか水路化が起らないことを示している。

参考文献

- 1) 泉 典洋: 水路群形成の線形安定論; 土木学会論文集, No.614, pp.65-75, 1999