

東北大学工学部 ○学生員 岩崎 智昭  
 東北大学大学院工学研究科 正員 岩熊 哲夫  
 東北大学大学院工学研究科 正員 後藤 文彦

1. まえがき

土木材料のほとんどが介在物や空隙を含む複合材料であるとみなすことができ、その巨視的挙動の情報の1つである巨視的平均弾性を微視的な観点から予測する研究は、新材料の高精度化等を目的として古くから行われてきたし、現在でもスマート材料開発には欠かせない技術となっている。その際に必要となるのが母材と介在物、および介在物間の相互作用の評価である。その一手法である森・田中理論<sup>1)</sup>による弾塑性をも含めた挙動の予測はいくつか行われている<sup>2)</sup>が、実験値がその理論的平均弾性の上界に非常に近い挙動を示していることは興味深く、本研究ではエネルギー的な視点から平均弾性の最尤値に当たるものを求め、これらと比較を行う。

2. 2相問題の上界と実験値との比較

材料はすべて等方弾性体とし、母材中に1種類の球形介在物が不規則に分布していると仮定したときの森・田中理論による巨視的平均体積弾性係数  $\bar{\kappa}$  はすでに以下のように求められている<sup>2)</sup>。

$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_M} = 1 - \frac{f(1 - \frac{\kappa_I}{\kappa_M})}{1 - (1-f)(1 - \frac{\kappa_I}{\kappa_M})\alpha} \dots\dots\dots (1)$$

ここに  $\kappa_M$ ,  $\kappa_I$  はそれぞれ母材、介在物の体積弾性係数であり、 $f$  は介在物の体積比率、 $\alpha$  は Eshelby のテンソル<sup>1)</sup>の係数であり母材のポアソン比と介在物形状の関数である。式(1)において剛性の大きい方の材料を母材とみなせば上界が得られ、小さい方の材料を母材とみなせば下界が得られる。図-1は多孔質なガラスとアルミニウムについて森・田中の上界と実験値<sup>3)</sup>とを示したものである。これによるといずれの実験値も上界に近い分布をしていることが分かる。ちなみに下界は  $\bar{\kappa} = 0$  である。

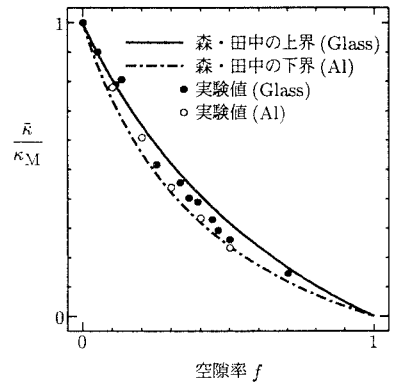


図-1 森・田中理論と実験値との比較

3. 2種類の介在物を含む材料の平均化

森・田中理論は母材と2種類の介在物との3相問題の平均化にも適用でき、介在物1の体積比率を  $f_1$ 、体積弾性係数を  $\kappa_1$  とし、また介在物2の体積比率を  $f_2$ 、体積弾性係数を  $\kappa_2$  とすると、その場合の平均体積弾性係数は以下のように表される。

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa_M(1 - f_1 - f_2) + \frac{f_1\kappa_M\kappa_1}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_1)\alpha} + \frac{f_2\kappa_M\kappa_2}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_2)\alpha}}{1 - f_1 - f_2 + \frac{f_1\kappa_M}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_1)\alpha} + \frac{f_2\kappa_M}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_2)\alpha}} \dots\dots\dots (2)$$

ここで式(2)において  $f_1 + f_2 = 1$  とすれば、すなわちそれは母材が存在せず2種類の材料を介在物とみなして平均化を行うことを意味する。しかしこのときの平均弾性には存在しないはずの母材の弾性とポアソン比が関係するため、Voigt と Reuss の上下界の間のどんな値にもできてしまう。したがって本研究ではエネルギー的な解析を行い、一番もっともらしい平均弾性を得るための母材の材料パラメーターを決定することを試みる。

多相系のポテンシャルエネルギーは以下のように表現できる<sup>1)</sup>。

$$W^* \equiv \frac{1}{2} \bar{\sigma} \bar{\epsilon} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 f_i C_M (S - I) \epsilon_i^* \epsilon_i^*, \quad i = 1, 2 \dots\dots\dots (3)$$

ここに  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\epsilon}$  は複合材料全体の平均応力テンソル、平均ひずみテンソルであり、 $C_M$  は母材の弾性テンソル、 $S$  は Eshelby のテンソル、 $I$  は単位テンソルである。また、下添え字  $i$  の1および2はそれぞれ介在物1と2を表し、

この  $\varepsilon_i^*$  は等価介在物置換<sup>1)</sup>によって導入される eigen ひずみと呼ばれる不適合ひずみである。森・田中の定式化を用いればこの  $\varepsilon_i^*$  は  $\bar{\sigma}$ 、あるいは  $\bar{\varepsilon}$  を用いて表現することができ、このエネルギー全体を  $\bar{\sigma}$  または  $\bar{\varepsilon}$  のいずれかを用いて表現することができる。つまり  $\bar{\sigma}$  を用いた場合は式 (3) は系全体の補ひずみエネルギーの表現になり、また  $\bar{\varepsilon}$  を用いた場合はひずみエネルギーの表現になる。したがって  $W^*$  を  $\bar{\sigma}$  で表現した場合は補ポテンシャルエネルギー最小の原理より、補ひずみエネルギーを最小化する母材の弾性係数とポアソン比が系全体の真の応力状態を実現すると考える。あるいは  $\bar{\varepsilon}$  で表現した場合はポテンシャルエネルギー最小の原理より、ひずみエネルギーを最小化する母材の弾性係数とポアソン比が系全体の真の応力状態を実現すると考えてみる。そのようにして求められた母材の体積弾性係数とポアソン比を  $f_1 + f_2 = 1$  であるとした式 (2) に代入することによって、2 種類の材料を共に介在物とみなして平均化した場合の巨視的平均体積弾性係数の最尤値が得られる。

#### 4. 数値例

図-2 は数値例であり、2 種類の材料 A, B の材料定数を  $\kappa_A = 2000$  (MPa),  $\kappa_B = 300$  (MPa),  $\nu_A = 0.3$ ,  $\nu_B = 0.3$  とした。短い破線は 2 相問題において材料 A を母材としたもので 2 相問題の上界を示しており、長い破線は 2 相問題において材料 B を母材としたもので 2 相問題の下界を示している。本研究の解析結果は実線と一点鎖線である。実線は補ポテンシャルエネルギー最小の原理によって導かれた平均体積弾性係数であり、これは本解析による上界である。一方一点鎖線はポテンシャルエネルギー最小の原理によって導かれた平均体積弾性係数であり、これは本解析の下界である。本解析結果の上界と下界はいずれも剛性の小さい方の材料の体積比率が小さい場合は、より 2 相問題の上界に近い挙動を示し、その体積比率が大きくなるにつれて、より 2 相問題の下界に近い挙動を示している。次に実験値との比較として図-3 は多孔質なガラスについて、また図-4 は多孔質なアルミニウムについて 2 相問題の上界、本解析の上界、および実験値とを示したものであるが、本解析の上界は実験値に近い挙動を示している。

#### 参考文献

- 1) Mura, T. : *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
- 2) 岩熊哲夫・堀 宗朗・森 勉・村外志夫 : 複合材料の平均的な硬化係数と延性の評価, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.435-442, 1991.
- 3) Cleary, Michael P., A. M. ASCE, Chen, I-Wei, and Lee, Shaw-Ming : Self-Consistent Techniques for Heterogeneous Media. *JOURNAL OF THE ENGINEERING MECHANICS DIVISION*, EM15, pp.861-887, 1980.

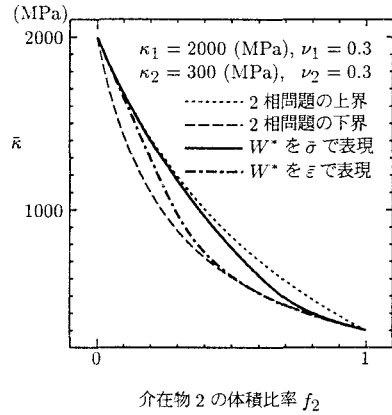


図-2 2 種類の介在物のみの平均弾性の最尤値

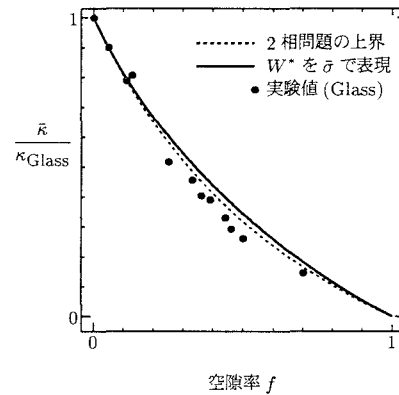


図-3 多孔質なガラスの平均体積弾性係数

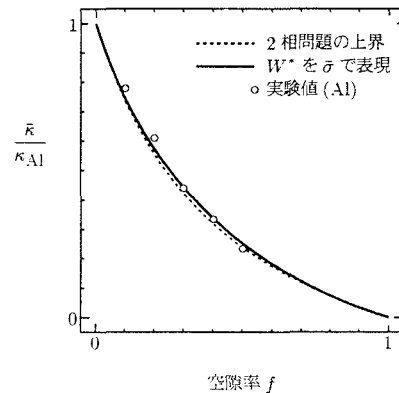


図-4 多孔質なアルミニウムの平均体積弾性係数