

I-32

分布欠陥による波動場の分散特性

 東北大学大学院 学生員 ○岸部大蔵
 東北大学大学院 学生員 高橋拓馬
 東北大学大学院 正員 北原道弘

1. はじめに

欠陥が弾性体中に分布して存在する場合、この弾性体中を伝播する波動場は欠陥により散乱され、散乱に伴って波動場は減衰し分散性を示す。分散を特徴付ける物理量が波速であり、分布欠陥中の波動場において波速は周波数に依存する。この分散特性を定量化することが出来れば、欠陥の分布状態に関する情報を抽出できる可能性があり、ここでは波速を因果律を介して散乱減衰率から求める計算法を示し、波速の周波数依存性に関する解析結果を示す。

2. 分散性と位相速度

図-1に示すように弾性母材内に形状と大きさの同じ円形クラックが x_1-x_2 平面と平行かつランダムに分布して存在している場合を考える。ここでクラックの分布状態は多重散乱が無視できる程度に疎であるとす。

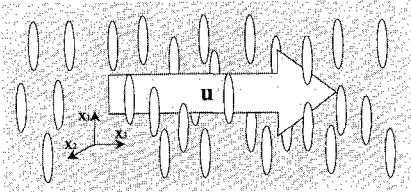


図-1 円形クラックと波動場

いま、クラック面と直行する x_3 軸方向に伝播している波動場を考えると、この波動場の位相速度は周波数に依存し、分散性を示す。この波動場の特性を調べるために複素波数を次のように導入する。

$$k_L(\omega) = \omega/c_L(\omega) + i\alpha(\omega) \quad (1)$$

この表現において、 $c_L(\omega)$ が位相速度、 $\alpha(\omega)$ が散乱減衰係数である。いま、平面波動場は上記複素波数を用いて、次のように書ける。

$$u(x) = \bar{u}(x_1, x_2)e^{-\alpha(\omega)x_3}e^{i[(\omega/c_L(\omega))x_3 - \omega t]} \quad (2)$$

上式より、円形クラックを含む材料中の波動場は $c_L(\omega)$ と $\alpha(\omega)$ の周波数特性に支配される事になる。

縦波が散乱体を含む材料中を伝播している場合、縦波の位相速度 $c_L(\omega)$ は因果律を意味するKramers-Krönig¹⁾ 関係を用いて散乱減衰から以下のように得られる。

$$c_L(\omega) = c_L^0 \left[1 + \frac{2\omega^2 c_L^0}{\pi} P.v. \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega') d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)} \right]^{-1} \quad (3)$$

ここで、 c_L^0 は $c_L(\omega)$ の静的極限である。

$$c_L^0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} c_L(\omega) \quad (4)$$

式(4)の関係を弾性母材の縦波波数 $k_L = \omega/\bar{c}_L$ （ここに、 $\bar{c}_L$ は母材の縦波速度）を用いて書き直すと次のようになる。

$$c_L(k_L) = c_L^0 \left[1 + \frac{2k_L^2 c_L^0}{\pi} P.v. \int_0^\infty \frac{\alpha(k'_L) dk'_L}{k_L'^2(k_L'^2 - k_L^2)} \right]^{-1} \quad (5)$$

上式(5)より位相速度の静的極限 c_L^0 、母材の縦波速度 $\bar{c}_L$ 、及び散乱減衰係数 $\alpha(k_L)$ より位相速度が得られる。上式に含まれる散乱減衰係数 $\alpha(k_L)$ は単位体積中のクラック個数 N 、クラックにより散乱されたパワー $P(\omega)$ により次の様に計算できる。

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} NP(\omega) \quad (6)$$

3. 位相速度の評価法

K-K関係式(5)を用いて位相速度を求める計算過程を示す。まず、位相速度を求める際に必要となる1個の円形クラックに対する散乱減衰係数を母材のポアソン比 $\nu = 0.20$ の場合について図-2に示す。縦軸はクラック半径 a で無次元化した散乱減衰係数を単位体積中のクラック個数 N で割った $\alpha a/N$ であり、横軸はクラック半径 a で無次元化した縦波波数 ak_L である。また、原点付近における散乱減衰係数の挙動を調べるため縦波波数 $ak_L \leq 0.1$ での散乱減衰係数 αa を単位体積中のクラック個数 $N = 0.01$ の場合について図-3に示す。ここで実線が散乱減衰係数、白丸が $1.85 \times (ak_L)^4$ の値であり、原点付近において散乱減衰係数は、縦波波数の4乗に比例している事が分かる。このことは、K-K関係式(5)における被積分関数の原点付近の特異性は見かけに過ぎないことを意味している。

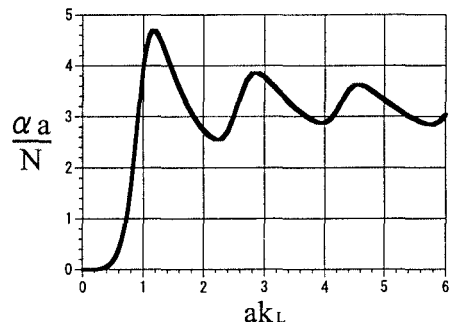


図-2 散乱減衰係数

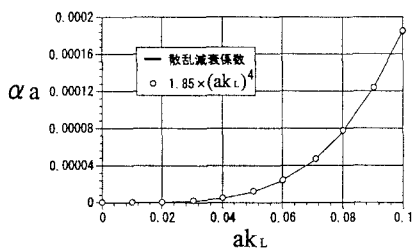


図-3 原点付近における散乱減衰係数

また、参考のため式(5)における被積分関数

$$f(k'_L) = \frac{\alpha(k'_L)}{k'^2_L(k'^2_L - k^2_L)} \quad (7)$$

のグラフを無次元化縦波数 $ak_L = 5.0$ の場合について図-4に示す。この $f(k'_L)$ を $k'_L = k_L$ 近傍で主値積分の意味で評価すれば位相速度が求まる。

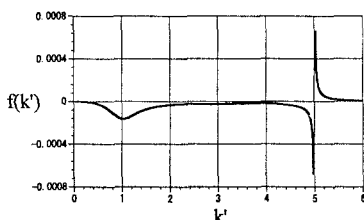


図-4 被積分関数

4. 数値解析結果

(1) 位相速度の静的極限

K-K関係式(5)の計算において、位相速度 $c_L(k_L)$ の静的極限 c_L^0 の値を必要とする。静的問題における均質化に関しては既に多くの研究がなされており、ここでは均質化法²⁾により静的極限を求める。その際に図-5に示すような直方体のユニットセルを設定した。位相速度を求める際に必要となる単位体積中のクラックの個数 N を無次元化したパラメータ ϵ を次のように定義する。

$$\epsilon \equiv Na^3 = \frac{a}{h} \frac{a^2}{l^2} \quad (8)$$

ここでは、ユニットセルの高さを $h/a = 3.6$ と固定し、辺長 l/a を変化させることにより単位体積中のクラックの個数を表すパラメータ ϵ を与え、位相速度の静的極限 c_L^0 を求めた。結果を表-1に示す。

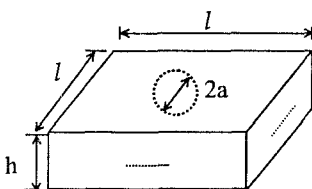


図-5 ユニットセル

表 1 単位体積中のクラック個数 ϵ と静的極限 c_L^0

l/a	2.9	3.6	4.3	5.0	5.7
ϵ	0.033	0.021	0.015	0.011	0.009
$c_L^0 / \bar{c}_L$	0.940	0.961	0.972	0.979	0.983

(2) 解析例

円形クラックがポアソン比 $\nu = 0.2$ の母材内に分布した場合の位相速度を図-6に示す。また、 $ak_L < 1$ の範囲において、位相速度 $c(ak_L)$ とクラック個数パラメータ ϵ の関係を図-7に示す。

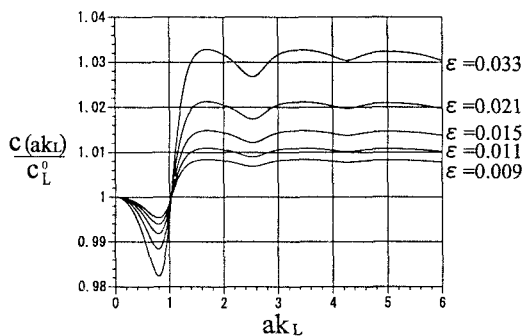


図-6 縦波数に対する位相速度

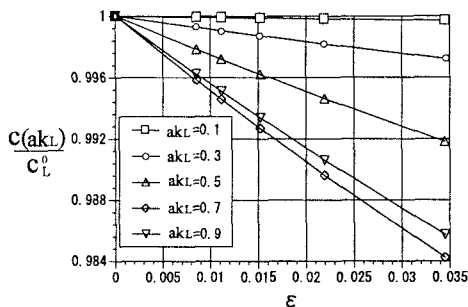


図-7 分布密度に対する位相速度

結論

図-6から円形クラックが存在する物体内の位相速度は低波数域では小さくなり、逆に高波数域では大きくなり振動する傾向があることがわかる。また、図-7から単位体積中のクラック個数が小さい場合においては、位相速度と単位体積中のクラック個数の間に比例関係があることがわかる。

謝辞

本研究において位相速度の静的極限を求めるに当たり、東北大学の寺田先生にご協力を頂いた。ここに深く感謝いたします。

参考文献

- 1) Beltzer, A.I.: The effective dynamic response of random composites and polycrystals - a survey of the causal approach, Wave Motion, Vol.11, pp.211-229, 1989
- 2) 寺田・菊池: 不規則な材料配置を有する複合材に対する漸近展開法に基づく均質化法の適用, 機論, 64-617, A(1998), 162-169.