I－23　板の有限変位解析の一手法

東北大学工学部　○学生員　西原　照雅
東北大学大学院工学研究科　正　員　岩熊　哲夫
東北大学大学院工学研究科　正　員　後藤　文彦

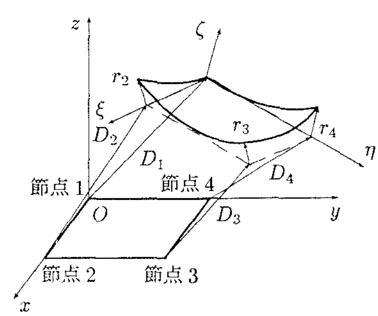
1.　まえがき

国際宇宙ステーションなどの柔軟宇宙構造物の建設も現実化している昨今，板やシェルの三次元大変位解析への関心も高まってきている．こうした大変位解析の定式化では，単に幾何学的に高次非線形であるに留まらず，回転角の非線形ベクトル性が定式化を更に煩雑にしている．

本研究では，長方形要素の一つの節点の回転成分で要素の剛体的な回転成分を代表させ，これを座標変換で表すとともに，この一節点に対する他の節点の相対変位で実質的な微小変形を表し，これを線形理論の剛性方程式で扱う簡単な定式化を試みた．なお，座標変換の記述には有限な回転を扱えるオイラー角を用いたが，接線剛性方程式の変位増分の回転角成分には、空間固定三軸回りの微小回転角を用い，モーメント外力成分もこれと対応させた．

2.　定式化

節点変位 $\boldsymbol{d}$ を，図–1 のような剛体変位 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}_1,\ \boldsymbol{D}_2,\ \boldsymbol{D}_3,\ \boldsymbol{D}_4)$ と相対変位 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{o},\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3,\ \boldsymbol{r}_4)$ の和と定義し，節点外力 $\boldsymbol{f}$ のモーメント成分は，空間固定三軸回りの成分として定義する．ここで，回転角成分に空間固定三軸回りの回転角を用いた節点変位を $\boldsymbol{d}$，オイラー角を用いたものを $\underline{\boldsymbol{d}}$ とする．これらの局所系での表現は，上付き添字 ℓ で表すことにすると，局所系での節点外力と全体系での節点外力は，要素の変形を無視できるならば，座標変換行列 $\boldsymbol{T}$ を用いて，$\boldsymbol{f}^\ell = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{f}$ と関係付けることができる．同様に，相対変位は $\boldsymbol{r}^\ell = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{r}$ と関係付けることができる．また，線形理論の剛性行列を $\boldsymbol{K}$ とすると，局所系で $\boldsymbol{f}^\ell = \boldsymbol{K}\boldsymbol{r}^\ell$ の関係が成り立つ．ここで，線形剛性行列は，同一寸法，同一形状の長方形平面応力要素と長方形板曲げ要素の各剛性行列を合成することにより得られる．なお，θ_{zi} に対応した自由度は前述の剛性行列にはないので，仮想の回転剛性係数を導入する[1)]．



図–1　板要素

以上の式から，全体系での剛性方程式 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{r}$ が得られる．これは，$\underline{\boldsymbol{d}}$ に関する非線形方程式なので，弧長増分法を用いて解く．$\underline{\boldsymbol{d}}$ に関する増分を取ると，

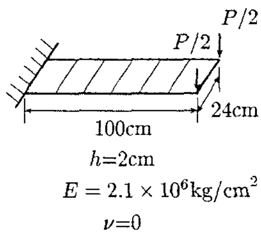
$$\Delta\boldsymbol{f} = \left[\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\underline{\boldsymbol{d}}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{r} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{K}\frac{\partial\boldsymbol{T}^T}{\partial\underline{\boldsymbol{d}}}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^T\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\underline{\boldsymbol{d}}}\right]\Delta\underline{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{K}_t\Delta\underline{\boldsymbol{d}} \tag{1}$$

となる．ここで，$\Delta\underline{\boldsymbol{d}}$ の回転角成分はオイラー角で定義されているが，$\Delta\boldsymbol{f}$ のモーメント成分に対応させて空間固定三軸回りの成分 $\Delta\boldsymbol{d}$ に変換する．この変換式は，幾何学的考察から導くことができ[2)]，変換行列 E を用いて $\Delta\underline{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{E}\Delta\boldsymbol{d}$ と書くことができる．これを式 (1) に代入して，以下に示す最終的な接線剛性行列が得られる．

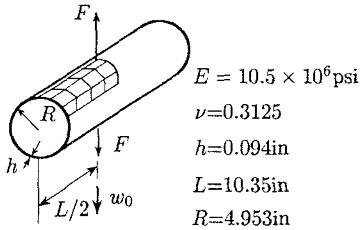
$$\Delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{E}\Delta\boldsymbol{d} = \overline{\boldsymbol{K}_t}\Delta\boldsymbol{d} \tag{2}$$

3.　片持梁のエラスティカ

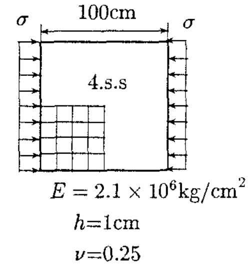
曲げを受ける大変位の問題として，図–2 に示す片持梁のエラスティカの解析を行った．本解析法は薄板を対象としているが，一軸部材に対応するようにポアソン比を 0 として解析した．解析モデルは，幅方向に 1 分割，部材軸方向に 10，20，100 分割としている．図–5 に，本解析の結果を楕円積分解とともに示す．要素分割を細かくするほど楕円積分解に近づき，100 分割でほぼ楕円積分解に一致している．



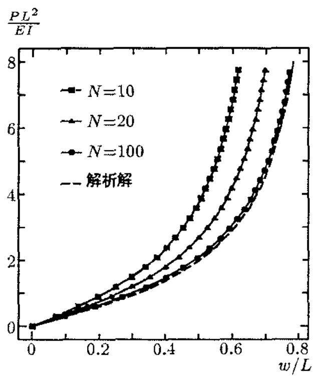
図–2 片持梁のエラスティカ



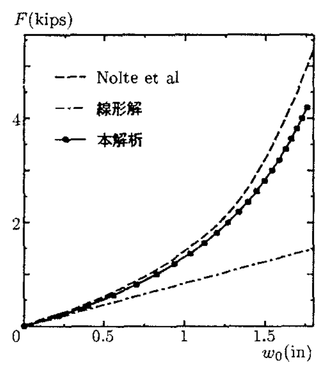
図–3 中央点に集中荷重を受ける円管



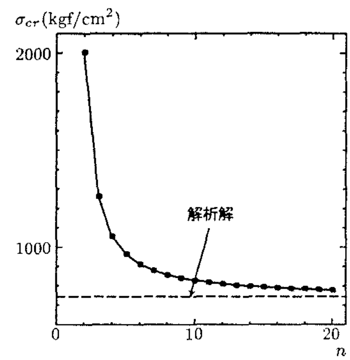
図–4 正方形板の座屈



図–5 片持梁のエラスティカ



図–6 中央点に集中荷重を受ける円管



図–7 正方形板の座屈

4. 中央点に集中荷重を受ける円管

図–3 に示す，中央点に集中荷重を受ける円管の変位を求めた．解析は，**図–3** に示すように 1/4 領域について，円周方向に 30 分割 × 長さ方向に 5 分割の 150 要素で行った．**図–6** に本解析の結果を，Nolte 等[3)]の結果と線形解とともに示す．荷重が小さいときはよく一致しているが，荷重が大きくなるにつれて Nolte 等よりもたわみが大きくなる．

5. 正方形板の座屈

図–4 に示す周辺単純支持正方形板に，一様な圧縮応力が作用している場合の座屈応力 σ_{cr} を求めた．解析は**図–4** のように，1/4 領域について，縦横ともに n 分割して行った．**図–7** に，解析解とともに本解析の結果を示す．要素分割を多くするに従って解析解に近づいているが，解析解に収束するのにかなりの要素分割を必要とする．

6. まとめ

剛体的な回転成分をオイラー角を用いた座標変換で表すことで，長方形要素の既存の線形剛性行列を利用した比較的簡単な定式化を提案した．いくつかの数値解析を行ったところ，エラスティカでは十分に要素数を増やすとこの定式化で十分な精度が得られた．円管の大変位問題，平板の座屈などでもかなりの要素分割を必要としたが，比較的よい精度が得られた．

参考文献

1) 鷲津 久一郎，宮本 博，山田 嘉昭，山本 善之，川井 忠彦共編：有限要素法ハンドブック I 基礎編，倍風館，1981.
2) 後藤文彦、小林裕、岩熊哲夫：オイラー角を用いた簡潔な有限変位解析手法，構造工学論文集 Vol. 43A，333-338, 1997.
3) Nolte, L.P.: On the Derivation and Efficient Computation of Large Rotation Shell Models, Finite Rotations in Structural Mechanics 1985, Lecture Notes in Engineering, Series 19, Springer-Verlag, 1986.