Ⅰ－15　Rayleigh 減衰が非線形振動系の応答に及ぼす影響に関する基礎的研究

日本大学工学部　学　○阿久津　知良　長谷川　潤
日本大学工学部　正　中村　晋

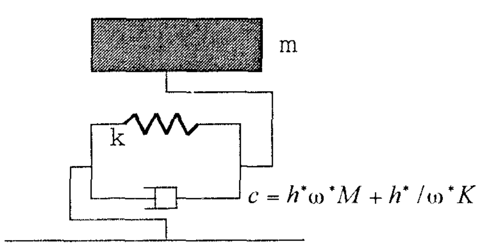
1．はじめに

強震動に対する構造物の応答を評価するためには、構成材料の非線形性を考慮する必要がある。その際、振動系の運動方程式に含まれる減衰特性は，材料自体の履歴減衰と速度項としての初期減衰を用いて評価される。後者については、減衰を解析上安定性をもたせる上でも必要となる。非線形の動的解析、特に地盤の動的解析を行う際、系の速度項の減衰特性として一般に Rayleigh 減衰が用いられる。その Rayleigh 減衰は、周波数に依存する性質を有することがよく知られている。ここでは、構造物の非線形型応答に及ぼす Rayleigh 減衰の周波数依存性の影響を把握するため、構造物として最も単純な振動系である１質点系を対象として復元力特性に着目した検討を行った。

2．解析方法およびモデル

解析の対象は、図－1 に示す１質点モデルである。これに調和地動が作用する際の運動方程式は式（1）となる。ここで $\ddot{x}, \dot{x}, x$ は、質点の相対応答加速度、相対応答速度、相対応答変位を表す．また、m、c、k はそれぞれ質量、減衰係数、剛性をあらわす。

$$m\ddot{x}_t + c\dot{x}_t + kx_t = -m\ddot{y} \qquad (1)$$



図－1　1質点減衰モデル

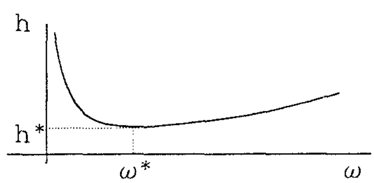
非線形の復元力特性に対しても応答が評価できるように式（1）を式（2）に示す増分方程式として再式定式化し、各応答量は Wilson の θ 法により求めた Δt 間の増分値の累積としてを算出した。ここで、$\tilde{k}$ は接線剛性であり、θ は解の安定性を考慮し 1.4 とした。

$$m\Delta\ddot{x}_t + c\Delta\dot{x}_t + \tilde{k}\Delta x_t = \Delta R_t m$$
$$\Delta R_t = -\theta\left(\ddot{y}_{t+\Delta t} - \ddot{y}_t\right) \qquad (2)$$

入力加速度時刻歴は 10 サイクルの sin 型の調和波形型とした。非線形復元力特性として完全弾塑性型の骨格曲線を用いた。ここで、質点の質量はm、初期剛性kは弾性固有周期が 0.5 となる値，降伏力は 0.4mg とした。

減衰定数cの最も単純な形は、減衰マトリクスが質量マトリクスに比例する場合(質量比例型減衰)、あるいは剛性マトリクスに比例する場合(剛性比例型減衰)である。Rayleigh 減衰とは、その両者の和で，$C = a_0M + a_1K$ （a_0, a_1：定数）の形式で表される。Rayleigh 減衰の減衰定数hと固有振動数ωとの関係は一般に図－2のようになり、最小の減衰定数h＊を与える。円振動数ω＊と a_0，a_1の関係は次式となることが分かっている。

$a_0 = h^*\omega^*$、$a_1 = h^*/\omega^*$



図－2　減衰定数と固有振動数との関係

3．減衰特性が復元力特性におよぼす影響

調和外力に対する応答変位xの定常振動の解を（3）式、それにより得られる応答速度$\dot{x}$は（4）式となる。

$x = a\cos(\omega t - \theta)$ （3）　$\dot{x} = -a\omega\sin(\omega t - \theta)$ （4）

これらより、減衰力を含めた復元力$(kx + c\dot{x})$と変形(x)との関係は式（5）のような楕円の式で表される。

$$Q = kx + c\dot{x}$$
$$= kx \pm c\omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (5)$$

ここで減衰定数hは、損失エネルギーΔW（$=\pi ca^2\omega$）と弾性エネルギーW($=1/2ka^2$)の比であるエネル

ギー損失率ΔW／Wと次式のように関連づけられる。

$$h = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\omega^*}{\omega}\cdot\frac{\Delta W}{W}\ ,\quad \omega^* = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (6)$$

まず、線形の振動系に周期が異なる３種類(T＝5.0, 0.5，0.2sec)の波を入力した際の復元力特性の比較を図－3 に示す。ここで、振幅ａを３(cm)、剛性係数 k を 1.56×10^6（tf／cm)、また、減衰定数の極小値ｈ＊を 0.05、極小値 h*のときの固有振動数ω＊を振動系の弾性固有円振動数 12.48rad/ｓ（T=0.5sec）とした。短周期の入力波に対して減衰定数が増加していることが分かる。次に、初期剛性に対して設定された減衰定数を有する復元力と変位の関係において、剛性低下と復元力特性の関係を図－4 に示す。ここで、各剛性に対する復元力は弾性最大復元力(=ka)で基準化し、剛性低下率は、初期剛性に対し 0.5、0.25、0.125 とした。これより、剛性低下に応じて減衰定数は増加し、特に周期 0.2 秒の場合に、減衰定数及び、復元力の増加が著しいことが分かる。最後に、非線形及び線形の復元力特性を有する振動系の復元力特性の比較を 2 つの異なる周期（Ｔ＝0.5 秒、0.2 秒）を有する入力波についての比較を図－6 に示す。右側の図は減衰項(=$c\dot{x}$)と変位(x)の関係を示す。これより、周期 0.2 秒の入力に対して、非線形化の影響により減衰定数が増加し、みかけの減衰に起因し降伏力の 1.25 倍程度の復元力を有していることが分かる。

以上の結果に基づき、減衰特性が非線形復元力特性を有する振動系の応答に及ぼす影響を図－6 に示す。図に示したように初期剛性等に基づき設定された減衰特性は、振動系の非線形化に伴う固有周期の長周期化（円振動数の低下）伴い減衰特性が図のように変化し、入力波の周期に応じた減衰定数が増加することを示している。このことは地震応答量を適切に評価する上で、減衰特性の設定は剛性の非線形履歴特性を設定するのと同様に重要であることを示していることが分かる。

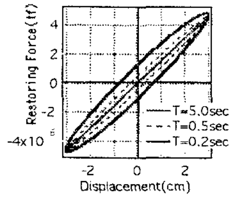
４．おわりに

ここでは，1 質点系を対象とした基礎的検討を実施したが、今後実破線に対応するような多質点系での検討を行うことが必要である。

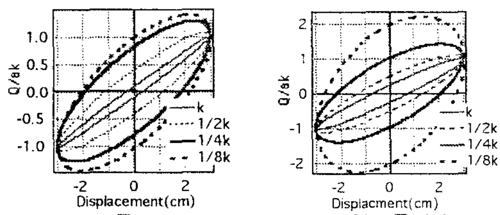
<参考文献>

１）大崎順彦：建築振動理論、彰国社

２）柴田明徳：最新耐震構造解析、森北出版

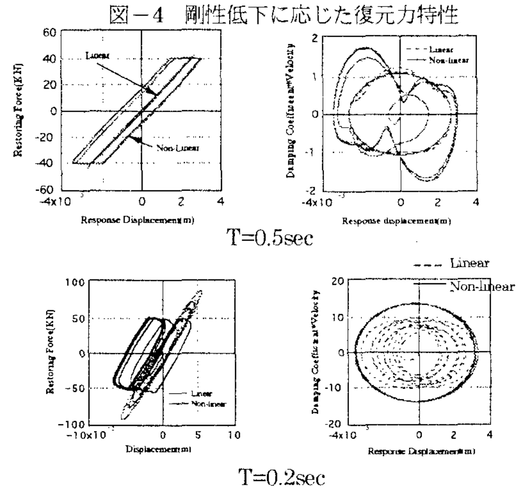


図－3　入力波の円振動数に応じた復元力特性

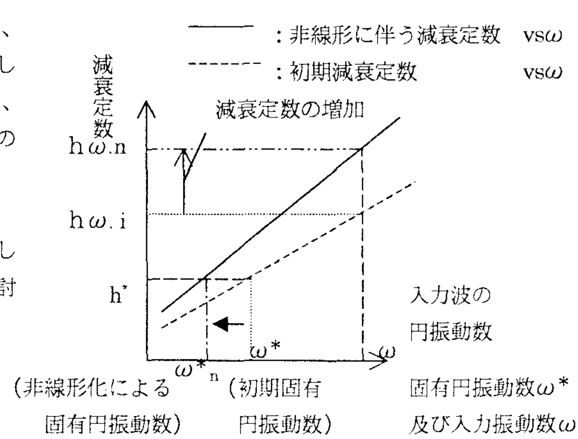


a)　T=0.5sec　　b)　T=0.2sec

図－4　剛性低下に応じた復元力特性



図－5　線形及び非線形の復元力を有する振動系の復元力特性の比較



図－６　減衰が非線形復元力に及ぼす影響のイメージ