

剛性マトリックス法による合成構造物の時間依存性応力解析

秋田大学大学院 学生員 ○柴田 希恵
 秋田県庁 正会員 松塚 忠政
 (株)ピー・エス 正会員 福田 伸
 秋田大学 フェロー 川上 洵

1. はじめに

合成断面を構成するコンクリートには、材齢とともにクープ、乾燥収縮が生じ、またPC鋼材にはリラクセーションが生じる。この時間依存性応力解析において、コンクリートの弾性係数の経時変化を考慮した材齢修正弾性係数¹⁾を用いるが、弾性係数の変化にともない部材の図心軸は移動する。そこで本研究は、構造系の変化にも容易に対応でき、一貫した解析を可能にするため基準点を任意に設定する剛性マトリックスおよび荷重項を明らかにし、その有用性を計算例を用いて示したものである。

2. 剛性マトリックス法

一般的な合成部材を図-1(a)に示す。基準点Oは、部材断面に関して任意に設定する。部材 i-j の剛性方程式は式(1)により表される。

$$\{X\} = [k]\{U\} + \{X_0\} \dots \dots (1)$$

ここで、 $\{X\}$: 外力ベクトル、 $[k]$: 基準点を任意に設定する部材剛性マトリックス、 $\{U\}$: 節点変位、 $\{X_0\}$: 荷重項である。

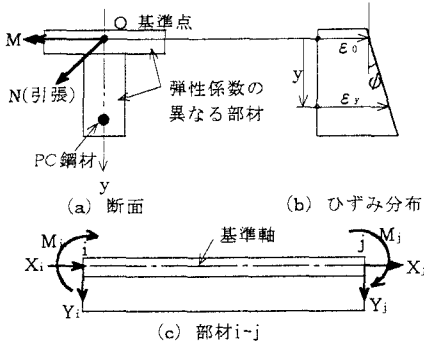


図-1 合成部材の断面と部材座標系

2.1. 任意に基準点を設定する剛性マトリックス

荷重が作用する合成構造物において、部材 i-j の剛性マトリックスを考える。図-2 のように部材 i-j を片持ち梁とし、単位力を作用させる。このとき、部材断面に対し換算断面諸量 A、B、I を用いる。

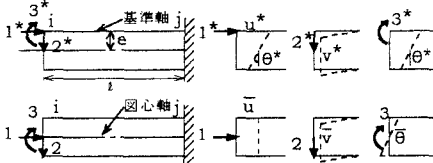


図-2 片持ち梁としたときの変位

この任意点と図心に単位力が作用したときの適合は、

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ \theta^* \end{Bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、 $[H]$: 変換マトリックスである。

図心軸に関する剛性マトリックスは、

$$[k] = E \begin{bmatrix} \frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_{CEN}}{l^3} & \frac{6I_{CEN}}{l^2} \\ 0 & \frac{6I_{CEN}}{l^2} & \frac{4I_{CEN}}{l} \end{bmatrix} \quad I_{CEN} = I - \frac{B^2}{A}, e = \frac{B}{A}$$

ここで、 I_{CEN} は図心に関する断面二次モーメントである。したがって、任意の基準点に関する片持ち梁状態での剛性マトリックスは、

$$[k_{11}^*] = [H]^T [k] [H] = E \begin{bmatrix} \frac{A}{l} & 0 & -\frac{B}{l} \\ 0 & \frac{12}{l^3} \left(I - \frac{B^2}{A} \right) & \frac{6}{l^2} \left(I - \frac{B^2}{A} \right) \\ -\frac{B}{l} & \frac{6}{l^2} \left(I - \frac{B^2}{A} \right) & \frac{4I}{l} - \frac{3B^2}{lA} \end{bmatrix}$$

ここで、 B, I は任意の基準点に関する断面一次モーメント、断面二次モーメントである。

次に、これを図-3のように両端の変位を拘束しないような状態に展開する。

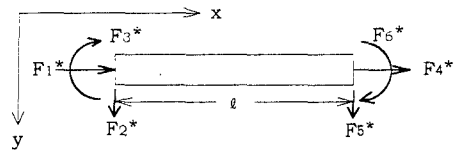


図-3 両端自由としたときの釣合い

この力の釣合いを考えると、

$$\begin{Bmatrix} F_{4*} \\ F_{5*} \\ F_{6*} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & l & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1*} \\ F_{2*} \\ F_{3*} \end{Bmatrix} \quad [R] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & l & -1 \end{bmatrix}$$

ここで、 $[R]$: 釣合いマトリックスである。

以上より、部材 i-j の剛性マトリックスは、

$$[k^*] = \begin{bmatrix} [k_{11}^*] & [k_{12}^*] \\ [k_{21}^*] & [k_{22}^*] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}^*] & [k_{11}^*][R]^T \\ [R][k_{11}^*] & [R][k_{11}^*][R]^T \end{bmatrix}$$

$$=E \begin{bmatrix} \frac{A}{l} & 0 & -\frac{B}{l} & -\frac{A}{l} & 0 & \frac{B}{l} \\ 0 & \frac{12}{l^3} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) & \frac{6}{l^2} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) & 0 & -\frac{12}{l^3} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) & \frac{6}{l^2} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) \\ -\frac{B}{l} & \frac{6}{l^2} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) & \frac{41}{l} - \frac{3B^2}{4A} & \frac{B}{l} & -\frac{6}{l^2} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) & \frac{21}{l} - \frac{3B^2}{4A} \\ -\frac{A}{l} & 0 & \frac{B}{l} & \frac{A}{l} & 0 & -\frac{B}{l} \\ 0 & -\frac{12}{l^3} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) & -\frac{6}{l^2} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) & 0 & \frac{12}{l^3} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) & -\frac{6}{l^2} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) \\ \frac{B}{l} & \frac{6}{l^2} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) & \frac{21}{l} - \frac{3B^2}{4A} & -\frac{B}{l} & -\frac{6}{l^2} \left(1 - \frac{B^2}{A}\right) & \frac{41}{l} - \frac{3B^2}{4A} \end{bmatrix}$$

2.2. 任意に基準点を設定する荷重項

部材を細かく分割し、節点を多数設けることにより、軸ひずみ、曲率が直線近似できる。部材 $i-j$ を片持ち梁とし、単位力を作用させたときの軸ひずみ、曲率の分布直線は、

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon(x) = \Delta \varepsilon_i + \frac{\Delta \varepsilon_j - \Delta \varepsilon_i}{l} x \\ \Delta \phi(x) = \Delta \phi_i + \frac{\Delta \phi_j - \Delta \phi_i}{l} x \end{cases}$$

この軸ひずみ、曲率による変位は、

$$\begin{cases} \Delta D_1 = -\int_0^l \Delta \varepsilon(x) dx = -\frac{\Delta \varepsilon_i + \Delta \varepsilon_j}{2} l \\ \Delta D_2 = -\int_0^l \Delta \phi(x) x dx = -\frac{\Delta \phi_i + 2\Delta \phi_j}{6} l^2 \\ \Delta D_3 = \int_0^l \Delta \phi(x) dx = \frac{\Delta \phi_i + \Delta \phi_j}{2} l \end{cases}$$

よって、軸ひずみ、曲率の変化にともなう荷重項は、

$$\{ \Delta X_0 \} = -[T]^T [k_{11}^*] \{ \Delta D \} \quad [T]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & l & -1 \end{bmatrix}$$

ここで、 $[T]$: 変換マトリックス、 $[k_{11}^*]$: 材齢修正弾性係数を用いた片持ち梁状態での部材剛性マトリックス、 $\{ \Delta D \}$: 片持ち梁状態での変位である。

したがって、荷重項は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= \frac{E \bar{A}}{2} (\Delta \varepsilon_i + \Delta \varepsilon_j) + \frac{E \bar{B}}{2} (\Delta \phi_i + \Delta \phi_j) \\ \Delta Y_i &= -\frac{E}{l} \left\{ \bar{I} - \frac{\bar{B}^2}{A} \right\} (\Delta \phi_i - \Delta \phi_j) \\ \Delta M_i &= -E \left\{ \bar{I} - \frac{\bar{B}^2}{A} \right\} \Delta \phi_i - \frac{\bar{B}}{A} \Delta X_i \\ \Delta X_j &= -\frac{E \bar{A}}{2} (\Delta \varepsilon_i + \Delta \varepsilon_j) - \frac{E \bar{B}}{2} (\Delta \phi_i + \Delta \phi_j) \\ \Delta Y_j &= \frac{E}{l} \left\{ \bar{I} - \frac{\bar{B}^2}{A} \right\} (\Delta \phi_i - \Delta \phi_j) \\ \Delta M_j &= E \left\{ \bar{I} - \frac{\bar{B}^2}{A} \right\} \Delta \phi_j - \frac{\bar{B}}{A} \Delta X_j \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ および $\bar{I}$ は材齢修正換算断面諸量である。

3. 数値計算例

桁高の変化する支間40mの2径間連続合成桁を図-4

に示す。鋼桁上にはプレキャスト床版が敷設され、床版には橋軸方向にポストテンション方式によりプレストレスが導入される。プレキャスト床版の敷設完了時、鋼桁はコンクリートと鋼桁の自重である分布荷重 90kN/m を支えることになる。プレストレス導入直後、断面は鋼桁とコンクリート床版との合成断面となる。プレストレス導入直後の材齢 t_0 および材齢 t における中間支点上断面での応力分布を求める。ただし、床版のプレストレス導入および鋼桁と床版の合成は、材齢 t_0 で同時に行われたとし、床版のプレストレス導入時は、床版は鋼桁上に自由に滑ると仮定する。計算にあたり、次の諸数値を用いる。

コンクリートの弾性係数 $E_c(t_0) = 30\text{ GPa}$

鉄筋、鋼桁および PC 鋼材の弾性係数 $E_s = 190\text{ GPa}$

初期プレストレス力 $P = 9800\text{ kN}$

クリープ係数 $\phi(t, t_0) = 2.2$ 材齢係数 $\chi(t, t_0) = 0.8$

乾燥収縮ひずみ $\varepsilon(t, t_0) = -220 \times 10^{-6}$

低減リラクセーション値 $\Delta \sigma_{pr} = -48\text{ MPa}$

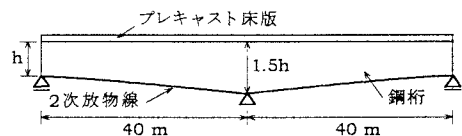


図-4 2径間連続桁

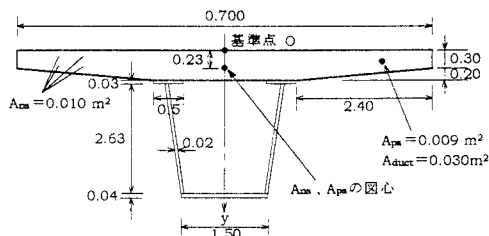


図-5 中間支点上断面図

図-4 に示した連続桁を、81 節点 80 部材に分割し、各部材の桁高は一定とした。

以下に解析結果を示す。

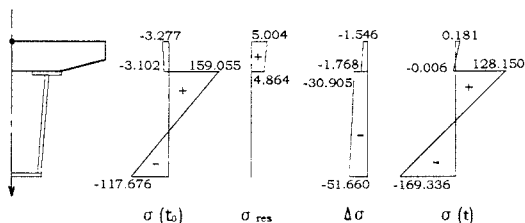


図-6 中間支点の応力分布 (MPa)

参考文献

- 1) Ghali, A and Favre, R (川上 洵、樫福 浄他訳): コンクリート構造物の応力と変形、技報堂出版、1995