

III - 7

マイクロメカニクスによる粒状体の構成則に関する研究

東北大学大学院 学生員 ○金子賢治

東北大学大学院 正 員 岸野佑次

東北大学大学院 正 員 京谷孝史

1. はじめに

粒子集合体である粒状体は離散的な材料であり、その非均質性とも関連して非常に複雑な力学特性を示す。粒状体においては個々の粒子間のすべりや、接触点の生成・消滅などの微視的な現象が巨視的な挙動を複雑に支配している。したがって粒状体の連続体モデルを構築する場合、このような材料内部のマイクロメカニクスを十分に反映させることが重要であると考えられる。そこで本研究においては、規則配列粒状体のマイクロメカニクスを詳細に検討し、特に流れ則について考察する。ここでのマイクロメカニクスの考察はすべて粒状要素法¹⁾に基づいている。

2. 2次元4粒子モデルのプロープ試験

ここでは、粒状体の流動則に関して考察するために図1に示す2次元4粒子モデルの応力プロープ試験を行う。まず、図2に示すような载荷経路によりせん断試験を行い、点Aにおいてプロープ試験を行う。ここでは、せん断試験の载荷曲線は示さないが、応力プロープ試験を行う点Aは、硬化段階の点である。また、応力プロープ方向は図3に示す28方向であり、各方向について载荷・除荷を行い弾性及び塑性ひずみ増分を計算する。応力プロープ試験により求めた塑性ひずみ増分をひずみ空間上に示すと図4のようになる。また、図4にはプロープ試験により解る降伏曲面とその法線ベクトルを示した。これより、塑性ひずみ増分の方は応力増分の方角によらず一定であり、その方向は降伏曲面の法線方向と一致しない。つまり、非関連流れ則を示している。以降、粒状体为非関連流れ則になる要因について考察する。

3. 粒子間接触点の力学特性

ここでは、一つの粒子間接触点の力学特性について検討する。粒状要素法における粒子間接触点は図5に示す線形バネと摩擦性要素からなるモデルを仮定する。粒子間接触点の相対変位は増分形で弾性部分と非弾性部分とに分解できるとして次式のように書く。

$$du = du^e + du^p \quad (1)$$

弾性部分の構成則は以下のようになる。

$$\begin{Bmatrix} dp_n \\ dp_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n & 0 \\ 0 & c_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_n^e \\ du_t^e \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 p 、 u はそれぞれ粒子間の接触力、相対変位を表しており、上付文字 e は弾性を下付文字 n 及び t はそれぞれ法線方向、接線方向成分を意味する。また、 c_n 、 c_t は法線方向及び接線方向のバネ定数である。

非弾性部分の相対変位増分の法線方向成分は新規に接触点が発生したり消滅した場合に生じると考えられるが、ここでは接触点の生成・消滅を考慮しないので常に0となる。したがって、非弾性部分の相対変位増分は接線方向のすべり量のみで表される。ここで、粒子間のすべり発生基準としてクーロンの摩擦則を仮定する。このことを式で表すと次式のようになる。

$$f(p) = |p_t| - p_n \tan \phi \leq 0, \quad p = \{p_n, p_t\} \quad (3)$$

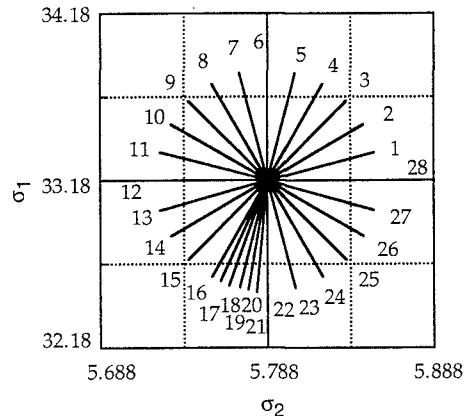


図3 プロープ試験における応力増分方向

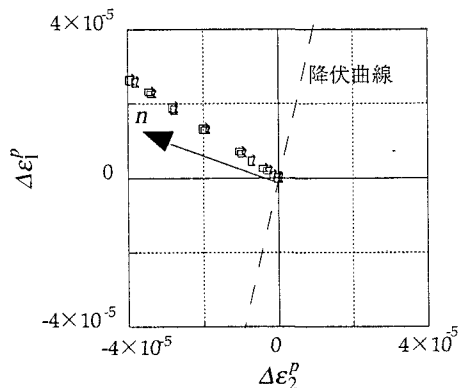


図4 塑性ひずみ増分方向

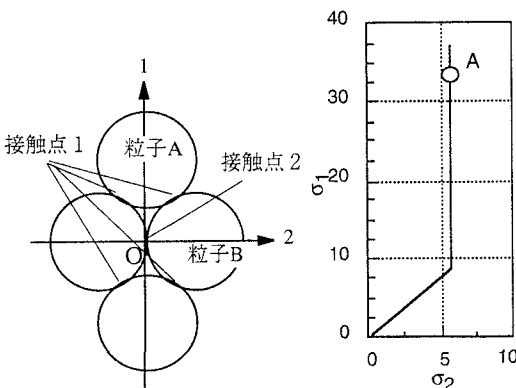


図1 2次元4粒子モデル

図2 载荷経路

ここに、 ϕ は内部摩擦角である。非弾性部分の相対変位増分の生じる方向は、接触力の接線方向にのみ依るし次式のように書くことができる。

$$\left\{ \frac{du_n^p}{du_t^p} \right\} = \lambda \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{sign } p_t \end{Bmatrix} \quad (4)$$

このことを図示すれば図 6 のようになる。非弾性部分の相対変位増分の方向は $f(\mathbf{p})$ に対する直交則が成立しないこととなる。微視的に直交則が成立していないので、それらの集合による巨視的な挙動も同様に直交則は成立しないと考えることができる。また、非弾性部分の相対変位増分の大きさは、一つの接触点のみを考慮した場合には不定であり、それが集合体となり、ある安定した構造体となった場合にその他の接触点などの拘束条件により定まることとなる。以上のような一つの接触点の相対変位と接触力の関係を図 7 に示す。この図のように粒状体の接触点での接線方向に関する力学特性は、弾完全塑性体の力学特性と類似している。粒状体の巨視的な挙動はこのような弾完全塑性体のような力学特性を有する多数の接触点の集合として現れると考えることができる。

4. 粒状体内部のエネルギー

古典的な熱力学による連続体モデルにおいては、次式のようにひずみと内部パラメータ等から決められる状態関数（内部エネルギー関数、自由エネルギー関数）が存在すると仮定し、この関数をひずみで偏微分することにより応力ひずみ関係を定めている。

$$W = W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}, \dots) \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6)$$

このような状態関数が存在すると仮定した場合、関数が連続である限り関連流れ則になることが示されている。ここでは、粒状体におけるこのような状態関数に関して前述の 4 粒子モデルを例に検討する。

粒状体の自由エネルギーを粒子間接触点のバネに蓄えられる弾性エネルギーだとすれば、一つの接触点における自由エネルギーは、接触点における微視的な変数を用いて次式のように書くことができる。

$$w_{(i)} = \frac{1}{2c_n} p_{n(i)}^2 + \frac{1}{2c_t} p_{t(i)}^2 \quad (7)$$

また、粒状体全体の単位体積あたりの自由エネルギーは次式のようになる。

$$W = \frac{1}{V_0} \left(\frac{1}{2c_n} \sum_{i=1}^n p_{n(i)}^2 + \frac{1}{2c_t} \sum_{i=1}^n p_{t(i)}^2 \right) \quad (8)$$

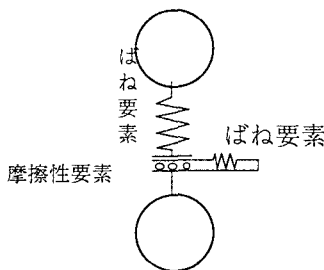


図 5 2 粒子間モデル図

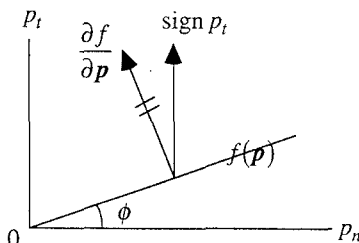


図 6 接触力空間における非弾性相対変位増分の方向

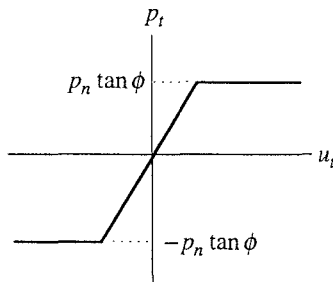


図 7 接線方向の相対変位と接触力の関係

ここに V_0 は初期状態の体積、 n は総接触点数である。したがって 4 粒子モデルの自由エネルギーは次式のように書くことができる。

$$W = \frac{1}{V_0} \left(\frac{2}{c_n} p_{n(1)}^2 + \frac{2}{c_t} p_{t(1)}^2 + \frac{1}{2c_n} p_{n(2)}^2 \right) \quad (9)$$

式 (9) を巨視的な変数で書き直せば²⁾、

$$W = \frac{1}{2C_3} \left\{ \frac{2c_n(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2)^2}{C_1 + C_2} + \frac{(C_2\sigma_1 - C_1\sigma_2 + 2c_n\varepsilon_2C_3)^2}{2c_t(C_1 + C_2)} + 2c_nC_2\varepsilon_2^2 \right\} \quad (10)$$

となり、ここで、

$$C_1 = r_A^0{}^2, C_2 = r_B^0{}^2, C_3 = r_A^0 r_B^0$$

である。また、 r_A^0 、 r_B^0 は初期状態の原点から粒子 A、B の中心までの距離である。このように 4 粒子モデルの自由エネルギーは、応力とひずみが混在した式でしか表せない。これは、接線方向の弾性部分の相対変位増分が非弾性部分とも関連して力の変数でしか表せないこと、幾何学情報がひずみを用いて表されることから生じる。また、この状態関数はひずみと応力がともに分かって初めてその状態を記述することができるものであり、これをひずみで偏微分することにより応力が求まるような性質のものではない。したがって、粒状体の場合は熱力学で示しているように理論的に必ずしも関連流れ則になるとはいえないと考えられる。

5. おわりに

ここでは、粒状体が非関連流れ則になることおよびその理由についてマイクロメカニクスに基づいて考察した。今後、より理論的な検討を行いたいと考えている。また、粒状体のマイクロメカニクスに基づいた連続体モデルを構築するためには、巨視的な弾塑性エネルギーと微視的に得られる摩擦エネルギー、バネに蓄えられるエネルギーとを的確に結びつける必要があると考えられる。

参考文献

- 1) 岸野 佑次：新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析，土木学会論文集，No. 406/III-11, pp. 97-106, 1989.
- 2) 金子賢治，岸野佑次，京谷孝史：微視力学に基づく粒状体の構成則の定式化，応用力学論文集，Vol.1, pp. 469-480, 1998.